

## PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXXIX.

*I. Ueber Ozonbildung an glühenden Platinflächen  
und das electrische Leitungsvermögen der durch  
Phosphor ozonisirten Luft;  
von Julius Elster und Hans Geitel.*

Bei der Discussion der Resultate unserer Untersuchung, betreffend die Electricitätserregung beim Contact verdünnter Gase mit galvanisch glühenden Drähten <sup>1)</sup> hatten wir auf die von anderen Beobachtern bemerkte Thatsache Bezug genommen, dass die Luft in der Umgebung einer Bunsenflamme oder eines glühenden Platindrahtes sich mehr oder weniger ozonhaltig erweist. <sup>2)</sup>

Für die Flamme ist diese ozonisirende Wirkung bekanntlich so auffällig, dass sie mit den einfachsten Mitteln nachgewiesen werden kann; genügt es doch, einen Luftstrom aus feiner Oeffnung durch den Saum einer Bunsenflamme zu treiben, um eine dem Geruchsinn unmittelbar wahrnehmbare Menge Ozon zu erzeugen. <sup>3)</sup> In der Umgebung glühender Metallflächen ist die Wirkung weit weniger hervortretend, ja, wie wir glauben möchten, nicht einmal mit ausreichender Schärfe nachgewiesen.

Es schien uns nicht ohne Bedeutung, mit Sicherheit festzustellen, ob auch in dieser Beziehung, wie bei den electrischen Erscheinungen, ein Parallelismus zwischen den Vorgängen in der Nähe von Flammen mit denen an der Be-

1) J. Elster u. H. Geitel, Wien. Ber. 97. IIa. p. 1175. 1888 u. Wied. Ann. 37. p. 315. 1889.

2) Vgl. R. v. Helmholtz, Wied. Ann. 32. p. 14. 1887.

3) Muspratt, Chemie. Artikel Ozon.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXIX.

rührungsfläche von Luft und glühenden Körpern vorhanden ist.

Führten uns so die electricischen Processe in den Flammen und der an glühenden Oberflächen erhitzten Luft zu der Untersuchung der gleichzeitigen Ozonbildung, so lag es nahe, einen notorisch ozonbildenden Vorgang, die Oxydation des Phosphors an feuchter Luft, auf seine electricischen Begleiterscheinungen zu prüfen.

Die nachfolgende Mittheilung enthält die Resultate der nach beiden Richtungen geführten Untersuchung.

#### I. Ozonbildung an glühenden Platinflächen.

Wir verwandten zu unseren Versuchen zuerst den schon früher zu den entsprechenden electricischen Untersuchungen benutzten Paquelin'schen Brenner, eine Hohlkugel aus Platinblech, welche durch die im Inneren erfolgende Verbrennung eines Gemisches von Luft und Benzindampf bis zu heller Gelbgluth erhitzt werden kann. Schwenkt man eine Porzellanschale mit verdünntem Jodkaliumkleister aus und hält dieselbe einige Zeit lang umgekehrt über die glühende Platinkugel, indem man starke Erhitzung möglichst vermeidet, so bemerkt man eine schwache Violettfärbung ihrer Innenfläche. Auf Zusatz einiger Tropfen äusserst verdünnter Lösung von Eisensulfat tritt die blaue Jodreaction lebhaft hervor.

Der Versuch in dieser Form lässt den Einwand offen, dass der in der Luft schwebende Staub bei seiner Verbrennung an der Platinfläche die Ozonbildung bewirken könne.

Um diesem Einwande zu begegnen, haben wir folgende Versuchsanordnung getroffen. Eine Glasröhre mit rechtwinklig umgebogener Spitze *S* war in der Nähe der Biegung zu einer Kugel aufgeblasen, in welcher ein spiralförmig gewundener Platindraht *D* luftdicht eingeschmolzen war. Letzterer konnte durch eine Batterie von drei Zinkkohlenelementen, deren Schliessungskreis einen veränderlichen Widerstand enthielt, bis zur Weissgluth erhitzt werden. Die Spitze *S* tauchte in ein mit verdünntem Jodkaliumkleister halbgefülltes Probirglas ein. Mittelst eines Kautschuckgebläses wurde aus einer als Windkessel dienenden grossen Flasche durch

ein mit Baumwolle dicht gestopft<sup>g</sup>es Rohr ein Luftstrom über *D* geleitet, der alsdann durch den Jodkaliumkleister entwich. Da während der Bewegung der Luft der Glühzustand des Drahtes *D* sank, so mussten Widerstände ausgeschaltet werden, um denselben auf gleicher Höhe zu erhalten. Als bald zeigte sich die Violettfärbung der in dem Probirglase enthaltenen Flüssigkeit. Entfernte man dasselbe, so konnte man direct durch den Geruch die ausströmende Luft als ozonhaltig erkennen. Eine lebhaft<sup>e</sup>e Luftströmung scheint die Menge des gebildeten Ozons wesentlich zu vermehren, und zwar wohl nicht nur wegen Vermehrung des zur Reaction gelangenden Luftquantums, sondern auch wegen der sofortigen Entfernung des Ozons aus dem Bereiche des glühenden Körpers.<sup>1)</sup>

## II. Das electricische Leitungsvermögen der an Phosphor ozonisirten Luft.

Gemeinsam der den Herd der Ozonentwicklung bildenden äusseren Schicht der Flamme und der Umgebung einer glühenden Metallfläche ist die Nachbarschaft hoher Temperaturen. Ozonbildung unter Ausschluss heisser Gase findet bei der langsamen Oxydation des Phosphors an feuchter Luft statt. Wir suchten nun festzustellen, ob die in den chemischen Process der Ozonbildung hineingezogene Luft auch bei gewöhnlicher Temperatur ein electricisches Leitungsvermögen annimmt.

Man verschafft sich ein zu den im Folgenden beschriebenen Versuchen taugliches Phosphorstück am einfachsten in der Weise, dass man in einer unten geschlossenen Glasröhre von ca. 5 mm Weite ein Quantum Phosphor unter heissem Wasser schmilzt, sodass dasselbe eine Säule von etwa 8 cm Länge bildet. Als dann führt man einen steifen Metalldraht bis auf den Grund des Röhrchens hinab und lässt den Phosphor erkalten. Nach dem Erstarren zieht

1) Anmerkung bei der Correctur: Durch freundliche Mittheilung des Hrn. Prof. E. Wiedemann erhalten wir Kenntniss einer Abhandlung von Dewar (Roy. Inst. 8. Juni 1888 Sep. 3 pp.), in welcher eine Vorrichtung zum Ozonisiren von Sauerstoff durch glühende Platinflächen beschrieben ist. —

man die Phosphorstange mit metallischem Kerne mittelst des Drahtes heraus. Dieselbe wird unter Wasser aufbewahrt und ist ohne weiteres zu den zu schildernden Versuchen verwendbar. — Kurze Zeit nachdem man dieselbe aus dem Wasser genommen hat, stellt sich die Ozonbildung an ihrer Oberfläche ein. Ausser durch den Geruch verräth sich dieselbe, wie bekannt, durch das Auftreten eines leichten Nebels, sowie das im Dunkeln wahrnehmbare Leuchten.

Verbindet man die Phosphorstange in diesem Zustande mit irgend einer Art Electroskop, so erkennt man, dass eine dauernde electricische Ladung desselben unmöglich ist, die Wirkung ist fast dieselbe, als ob man eine Flamme von geringer Grösse verwandt hätte. Leitet man dementsprechend das Electroskop zur Erde ab, bringt einen electrisirten Körper in die Nähe der Phosphorstange und hebt nun die Verbindung mit der Erde auf, so tritt sofort ein Ausschlag ein, der anzeigt, dass das Electroskop sich unter dem Einfluss des electricischen Körpers mit gleichnamiger Electricität geladen hat. Die Phosphorstange wirkt also als Collector.

Bei Verwendung eines empfindlichen (Thomson'schen Quadrant-) Electrometers lässt sich dem letzteren Versuche folgende Form geben. Man senkt die mit dem Electrometer verbundene Phosphorstange in das Innere eines isolirten Metall(Weissblech)cylinders ein, der abwechselnd mit den entgegengesetzten Polen einer Säule von wenigen galvanischen Elementen in leitenden Zusammenhang gebracht werden kann. Bei Umkehrung der Ladung des Cylinders kehrt sich der Sinn der Ausschläge des Electrometers (das natürlich vor jeder Umschaltung zur Erde abgeleitet war) ebenfalls um.

Hierbei zeigte sich nun, dass bei Verwendung von Platin und Kupferdrähten als Axe für die Phosphorstange der Ausschlag nach der positiven Seite um einen merklichen Betrag grösser als nach der negativen ausfiel. Leitet man die Blechcylinder zur Erde ab, so nahm demgemäss das Electrometer von selbst eine kleine positive Ladung an, die mit der aus dem Unterschiede der zuvor beobachteten Ausschläge befriedigend übereinstimmte; dieselbe betrug etwa  $+\frac{1}{4}$  Daniell.

Es wäre indessen voreilig, hieraus auf die Existenz einer



an der Oberfläche des Phosphors thätigen electromotorischen Kraft zu schliessen. Es ist vielmehr zu bedenken, dass hier die Bedingungen für die Bildung eines Elementes: Metall der Axe — feuchte Phosphorfläche — leitende Luft — Metalleylinder gegeben sind. Lässt man die Phosphoroberfläche direct die Innenwand des Metalleylinders berühren, so schaltet man damit die etwaige electromotorische Kraft: Phosphoroberfläche — leitende Luft aus.

Wir beobachteten bei dieser Anordnung in der That ebenfalls eine positive electromotorische Kraft, die allerdings um einen sehr kleinen Betrag (etwa  $\frac{1}{8}$  Dan.) geringer erschien, als die zuvor gemessene. Ersetzt man den Kupfer- oder Platindraht der Axe des Phosphorstücks durch einen Zinkstreifen, so ergibt sich eine negative electromotorische Kraft. Jetzt war dieselbe etwa um den oben genannten Betrag grösser, wenn der Phosphor die Innenwand des Weissblecheylinders berührte, als wenn er frei in demselben schwebte. Man sieht, dass jene electromotorische Kraft wesentlich von der Natur des Metalles abhängt, welches die Axe des Phosphors bildet. Sie stimmt im Vorzeichen mit der des Elements, gebildet aus dem Kerne des Phosphors, der feuchten Oberfläche des letzteren und dem Metall des Weissblecheylinders überein. Doch scheint die Einschaltung einer Luftschicht zwischen Phosphor und Metalleylinder eine geringe Steigerung der electromotorischen Kraft in positivem Sinne zu bewirken. Wir glauben indessen, dass die Versuchsbedingungen nicht rein genug herzustellen sind, um einen Schluss auf die Existenz einer eigenen electromotorischen Kraft des Ozonisirungsprocesses völlig sicher zu machen.<sup>1)</sup>

Wir untersuchten ferner, ob die durch Contact mit dem Phosphor leitend gewordene Luft einen Unterschied des Verhaltens gegen positive und negative Electricität zeigte, d. h. ob derselben ein unipolares Leistungsvermögen zukommt, wie es die mit glühenden Körpern zusammengetroffenen Gase aufweisen. Es gelang uns nicht, ein solches Verhalten zu

1) Ein Beweismittel für oder wider die Theorie der atmosphärischen Electricität von C. Wurster (Meteorolog. Zeitschr. Jahrg. IV. Literaturbericht [35]) kann also aus diesem Versuche nicht entnommen werden.

finden, positive wie negative Ladungen gleicher Grösse entweichen von feuchten Phosphorflächen in nahe gleicher Zeit, bezw. werden von ihnen in nahe gleichen Zeiten aufgenommen.

Vor kurzem hat Giese<sup>1)</sup> eine Erscheinung beschrieben, die für das electrische Leitungsvermögen der Flammengase bezeichnend genannt werden muss. Giese umgab eine isolirte Flamme mit einem Metall- (Weissblech-) cylinder, in welchem coaxial ein aus Draht gebildeter Ring ausgespannt war. Letzterer stand durch eine Oeffnung der Cylinderwand mit einem Electrometer in leitender Verbindung. Wurde die Flamme durch eine vielpaarige Säule geladen, so zeigte das letztere einen grösseren Ausschlag an, wenn der umgebende Cylinder zur Erde abgeleitet war, als wenn er mit der Flamme auf gleichem Potential gehalten wurde.

Die Erscheinung kann wohl nicht anders gedeutet werden, als dass die Electricität von der Flamme aus durch electrisirte Theilchen übertragen wird, die der Richtung der Kraftlinien folgen und deren Geschwindigkeit mit Steigerung des Potentialgefälles zunimmt.

Wir haben den Versuch in der Art etwas abgeändert, dass wir den Radius des Cylinders unendlich gross nahmen. Wir verwandten einen ebenen Weissblechschirm von 13 cm Breite und 16 cm Länge, parallel und sehr nahe demselben war ein mit dem Electrometer verbundenes gerades Kupferdrahtstück von gleicher Länge aufgestellt und in 10 bis 15 cm Entfernung die isolirte Leuchtgasflamme. Auch bei dieser Anordnung erfolgte ein weit grösserer Ausschlag des Electrometers, wenn bei geladener Flamme der Schirm zur Erde abgeleitet war, als wenn er mit der Flamme gleiche Spannung hatte; die Einstromung in den Draht erwies sich im ersten Falle etwa zehnmal so stark, als im zweiten. Wir benutzten als Electricitätsquelle eine Batterie von 30 bis 50 kleinen Zink-Wasser-Platinelementen. Die beschriebene kleine Abänderung des Versuches ermöglicht es, durch Verschieben des isolirten Paralleldrahtes die Stellung zu finden, für welche die Erscheinung am deutlichsten hervortritt.

Nachdem die Versuche an der Flamme das von Giese

1) W. Giese, Wied. Ann. 38. p. 403. 1889.

gefundene Verhalten bestätigt hatten, ersetzten wir dieselbe durch das Phosphorstück. Auch hier beobachteten wir die gleiche Erscheinung, die Ausschläge des Electrometers in gleichen Zeiten fielen grösser aus, wenn der Blechschirm abgeleitet, als wenn er isolirt und mit der geladenen Phosphorstange leitend verbunden war. Setzt man den in einer bestimmten Zeit (ein bis drei Minuten) erfolgenden Ausschlag bei der ersten Stellung gleich Eins, so ergaben sich bei verschiedenen Abständen und Ladungen der Phosphorstange als Maass der Einströmung für die zweite Stellung folgende Werthe:

|      |      |      |       |
|------|------|------|-------|
| 0,36 | 0,23 | 0,41 | 0,40. |
|------|------|------|-------|

Es verhält sich demnach die durch die Oxydation des Phosphors veränderte Luft in ihrem electricischen Leitungsvermögen wie die eine Flamme einhüllenden Gase.

### III. Controlversuche.

Durch die im Vorigen beschriebenen Versuche dürfte zwar als nachgewiesen gelten, dass die Art der electricischen Wirkung eines in Oxydation begriffenen Phosphorstückes im wesentlichen mit der einer Flamme übereinstimmt, indessen ist nicht zu ersehen, welchen Antheil die Begleiterscheinungen der Oxydation, nämlich das Vorhandensein von Nebel und Ozon, sowie die Lichtentwicklung an dem Zustandekommen des electricischen Leitungsvermögens haben können. Wir stellten daher noch mehrfach Controlversuche an, um diese Einflüsse nach Möglichkeit zu trennen.

Die Oxydation des Phosphors und alle oben genannten Begleiterscheinungen werden bekanntlich durch die Anwesenheit von Spuren Terpentinöldampfes unterdrückt. Zugleich erlischt, wie zu erwarten war, das electricische Leitungsvermögen der umgebenden Luft. Wir führten die mit dem Electrometer verbundene Phosphorstange in den oben beschriebenen isolirten Metalleylinder ein. Nachdem wir uns überzeugt hatten, dass eine electricische Ladung desselben sich auf die thätige Phosphorstange übertrug, senkten wir, ohne den Phosphor oder den Cylinder zu berühren, einen mit Terpentinöl getränkten Wattebausch ein. Die nun erfolgten geringen Schwankungen der Electrometernadel, die nicht einmal hinsichtlich des Vorzeichens mit den zu erwartenden

Ablenkungen übereinstimmten, charakterisirten sich deutlich als Störungen. In gleicher Weise macht ein die Phosphorfläche treffender, aufsteigender Leuchtgasstrom die Electricitätsübertragung unmöglich.

Hieraus dürfte hervorgehen, dass dieselbe in der That als Begleiterscheinung der Oxydation aufzufassen ist.

Die Anwesenheit fertig gebildeten Ozons genügt nicht, um die Luft electricisch leitend zu machen.<sup>1)</sup> Ein in ein oben offenes Glasrohr eintauchender Platindraht behielt eine electricische Ladung bei, wenn von unten her stark ozonhaltiger Sauerstoff (dargestellt durch Electrolyse abgekühlter, verdünnter Schwefelsäure) eingeleitet und die mit Schwefelsäure benetzte Innenwand des Röhrchens mit der Erde verbunden wurde.

Die fernere Nebenerscheinung, deren Einfluss zu untersuchen war, ist die Entstehung eines Nebels (von salpetrigsaurem Ammoniak)<sup>2)</sup> in der Nähe der Phosphorstange. Derselbe lässt sich auf keine Weise ausschliessen, ohne dass zugleich die Ozonbildung unterdrückt wird. In ruhiger Luft bildet derselbe einen Strom, der an der vertical aufgehängten Phosphorstange herabsinkt und eine die Verlängerung derselben bildende Säule darstellt. Wurde nun der Phosphor electricisirt, ihm gegenüber eine Metallfläche isolirt und mit dem Electrometer verbunden aufgestellt, so zeigte sich der Ausschlag desselben nicht merklich davon abhängig, ob der Nebel frei hinunterfiel oder ob Theilchen desselben die Platte trafen. Ja sogar ein zwischen Phosphorstange und Platte hindurchgetriebener Leuchtgasstrom hinderte die Uebertragung kaum, so lange er den Phosphor nicht selbst traf. Geschah das letztere, so erlosch dieselbe zugleich mit dem Leuchten und der Ozonbildung.

Da die Nebelbildung auf die Entstehung eines Ammoniaksalzes zurückgeführt wird, so war zu erwarten, dass künstlich hergestellte Nebel von Ammoniaksalzen ebenfalls nur geringe Electricitätsmengen übertragen würden. Wir umgaben einen mit Salzsäure getränkten Wattebausch mit

1) Auch ein Dampfstrahl reagirt nach R. v. Helmholtz (l. c. p. 18) auf Ozon nicht.

2) Vgl. Muspratt, Chemie. Artikel Ozon.

einem isolirten Drahtlinge. Letzterer war mit dem Electrometer verbunden, der Wattebausch electricisirt. Wurde nun unter denselben ein mit Ammoniakflüssigkeit befeuchteter Baumwollappen gebracht, so entstand um den Wattebausch und Drahtling ein dichter Salmiaknebel. Die nun erfolgende Electricitätsübertragung auf den Drahtling war so gering, dass sie bei Anwendung von 50 Elementen der Zink-Platin-Wasserbatterie nur bis zu 7 Scalentheilen pro Minute (für Dan. = 40) ergab, während bei gleichen Bedingungen die Phosphorstange eine mit Spiegel und Scala nicht mehr messbare Ablenkung bewirkte.

Wir glauben daher zu dem Schlusse berechtigt zu sein, dass der bei der langsamen Oxydation des Phosphors sich bildende Nebel an der Electricitätsübertragung nur in untergeordneter Weise betheiligt sein kann.

Schliesslich könnte man vermuthen, dass die Lichterscheinung in der Nähe der Phosphorfläche in einem inneren Zusammenhange mit der electricischen Leitungsfähigkeit der umgebenden Luftschicht steht.

Es dürfte wohl kaum möglich sein, sich durch einen unmittelbaren Versuch hierüber Klarheit zu verschaffen. Doch möge es erlaubt sein, eine verwandte Erscheinung heranzuziehen. Auch Schwefel ist bekanntlich dicht unter seiner Entflammungstemperatur fähig, unter schwacher Lichtentwicklung sich zu oxydiren.<sup>1)</sup> Man bringt denselben am einfachsten dadurch in diesen Zustand, dass man eine kleine Menge davon auf einem Metallblocke bis zur Entflammung erhitzt. Bläst man die Schwefelflamme sofort aus und zwar wiederholt, falls sie wieder erscheinen sollte, und lässt zugleich das Metall sich abkühlen, so gelangt man bald dahin, dass der Schwefel sich nicht mehr entzündet, aber noch lebhaft verdampft.

Betrachtet man den Vorgang im Dunkeln, so bemerkt man eine eigenthümlich fahlblaue flottirende Flamme. Man hat hier offenbar ein Luminescenzphänomen (nach E. Wiedemann<sup>2)</sup>) vor sich, das mit dem beim Phosphor auftretenden wohl in eine Classe (Chemiluminescenz) gehört.

1) Vgl. K. Heumann u. O. Jacobson, Beibl. 7. p. 296. 1883.

2) E. Wiedemann, Wied. Ann. 34. p. 446. 1888.

Unsere Versuche, auch hier ein electricisches Leitungsvermögen nachzuweisen, sind indessen negativ ausgefallen. Es ist natürlich nicht möglich, die Nichtexistenz desselben zu behaupten, nur dürfte soviel feststehen, dass es, verglichen mit dem am Phosphor beobachteten, nur sehr klein sein kann.

Kurz erwähnt möge noch werden, dass eine leuchtende Phosphorstange durch eine klare Gypsplatte keine electricische Wirkung mehr ausübt, an einen auf Emission ultraviolettten Lichtes zurückführbaren Einfluss also nicht gedacht werden kann.

#### IV. Resultate.

Wir glauben, die Ergebnisse der mitgetheilten Versuche in folgender Weise zusammenfassen zu können:

- 1) Glühende Platinflächen ozonisiren die umgebende Luft, auch bei Ausschluss von Verbrennungen.
- 2) Luft erweist sich als Leiter der Electricität nach Art der Flammengase, während sie durch Berührung mit feuchtem Phosphor ozonisirt wird.
- 3) Eine electromotorische Kraft dieses Ozonisirungsprocesses oder ein unipolar, Leitungsvermögen der von demselben betroffenen Luft konnte nicht nachgewiesen werden.
- 4) Die blosse Anwesenheit fertig gebildeten Ozons, sowie die Entstehung von Nebeln aus Ammoniaksalzen in der Nähe des Phosphors sind an dem Zustandekommen des electricischen Leitungsvermögens der umgebenden Luft nicht oder nur in untergeordneter Weise betheiligt.

Es muss auffallen, dass in den unter 1) und 2) genannten Fällen Ozonbildung und Electricitätsleitung in Luft gleichzeitig auftreten. Doch würde es verfehlt sein, hieraus schliessen zu wollen, dass die Ozonbildung Ursache der Electricitätsleitung sei. Sie ist zunächst nur eine — vielleicht constant auftretende — Begleiterscheinung. Aber auch als solche bietet sie ein Interesse.

Die von Giese<sup>1)</sup> und A. Schuster<sup>2)</sup> zuerst begründete Auffassung der electricischen Leitung der Flammengase, sowie

1) W. Giese, Wied. Ann. 17. p. 570. 1882.

2) A. Schuster, Proc. Roy. Soc. 37. p. 317. 1884.

der Gase überhaupt als eines electrolytischen Processes, bei welchen die Electricitätsübertragung von Molecül zu Molecül nur unter Dissociation derselben erfolgen kann, hat sich vielen Vorgängen gegenüber als ausreichend bewährt. Nachdem uns dieselbe zu einer brauchbaren Theorie der verwickelten electrischen Erscheinungen geführt hatte, die beim Contact von Gasen mit glühenden Körpern auftreten, ist sie uns auch zu vorliegender Untersuchung die Veranlassung gewesen. Es ist zuzugeben, dass die genannte Auffassung aus den beiden hier behandelten Fällen des Zusammentreffens von Electricitätsleitung und Ozonbildung eine Stütze für sich entnehmen kann, da ja das Auftreten von Ozon als Anzeichen einer vorhergegangenen Aufspaltung der Sauerstoffmolecüle angesehen wird.

Wolfenbüttel, im December 1889.



**II. Ueber einen hemmenden Einfluss  
der Belichtung auf electriche Funken- und  
Büschelentladungen;  
von Julius Elster und Hans Geitel.**

Vor kurzem machten wir darauf aufmerksam<sup>1)</sup>, dass reine Oberflächen electropositiver Metalle, besonders solche von frisch amalgamirtem Zink sich gut dazu eignen, das Entweichen negativer Electricität während der Bestrahlung durch kurzwelliges Licht zu zeigen. Es liess sich erwarten, dass die Verwendung negativer Electroden aus diesem Materiale auch die Entladungen hoch gespannter Electricität während der Dauer der Belichtung modificiren würde.

Lässt man die Büschel und Funken einer Holtz'schen Maschine zwischen einer kleinen Kugel von beliebigem Metall und einer negativen Fläche von amalgamirtem Zink sich entwickeln, so beobachtet man bei Belichtung der letzteren auffallende Erscheinungen; wir möchten dieselben im Folgenden kurz beschreiben.

Unsere Versuchsanordnung stimmt im wesentlichen mit der von E. Wiedemann und H. Ebert<sup>2)</sup> zum Zweck der Anstellung des Hertz'schen Grundversuches mittelst der Holtz'schen Maschine angegebenen überein.

Die beiden in die 2,2 cm starken Kugeln *AA'* endenden Polstäbe der Holtz'schen Maschine (s. die Figur) wurden mit den beiden Armen eines Henley'schen Ausladers verbunden. Der positive Arm des Ausladers trägt eine Messingkugel (*B*) von 14 mm, der negative eine kreisförmige Zinkscheibe (*B'*) von 15 cm Durchmesser. — Die unserige ist nach Art der Polscheiben, welche zur Erzielung langer Funken am negativen Pole von Influenzmaschinen angebracht werden, aus zwei mit den Rändern aufeinander gelötheten schalenförmigen Zinkblechen angefertigt, der gelöthete Rand wird zum Schutz gegen Quecksilber mit einem

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. 38. p. 497. 1889.

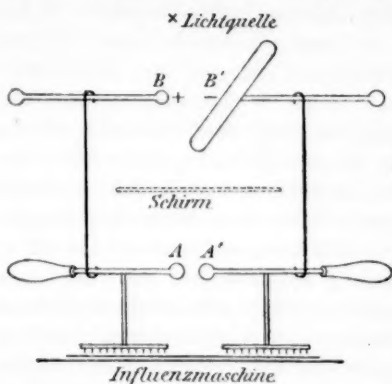
2) E. Wiedemann u. H. Ebert, Wied. Ann. 33. p. 241. 1888.

breiten Ueberzuge von Lack versehen. Uebrigens dürfte ein kreisförmiges Zinkblech mit nach rückwärts umgebogenem Rande genügen.

— Vor Anstellung des Versuches wird die Vorderseite der Scheibe frisch amalgamirt, indem man einen Tropfen Quecksilber mittelst eines in verdünnte Schwefelsäure getauchten Leinwandläppchens darauf verreibt. Man putzt mit reiner Leinwand nach, sodass

eine spiegelnde Oberfläche entsteht. So vorbereitet, befestigt man die Platte am negativen Arme des Ausladers, stellt die positive Kugel *B* in einer Entfernung von ca. 6 bis 10 cm der Mitte derselben gegenüber und entfernt die Kugeln *AA'* der Maschine so weit, dass die Funken zwischen *B* und *B'* überschlagen. Belichtet man nun die negative Polfläche durch einen in einer Entfernung von 30 bis 50 cm entzündeten Streifen Magnesiumbandes, so setzt der Funkenstrom aus, um sofort nach Erlöschen der Magnesiumflamme wieder aufzutreten. Schiebt man die Kugeln *AA'* einander näher, bis die Funken mit ungefähr gleicher Leichtigkeit zwischen *AA'* wie *BB'* entstehen und giebt dann der letzteren Strecke dadurch ein kleines Uebergewicht über die erstere, dass man *A* von *A'* noch etwa 1 mm entfernt, und belichtet nun, so verschwinden die Funken bei *BB'*, um bei *AA'* zu erscheinen. Wird *B* durch einen abgerundeten Metallstab ersetzt oder so weit zurückgezogen, dass während der Thätigkeit der Maschine sich Büschellicht am positiven Pole entwickelt, so erlischt dieses während der Belichtung und in der Nebenschliessung *AA'* erfolgt Funkenentladung. Glimmlicht bei *B* bleibt während der Einwirkung des Lichtes bestehen.

Bei allen Versuchen ist wesentlich, dass die Scheibe *B'*



(in der Figur deshalb schräg gezeichnet) möglichst voll vom Lichte getroffen wird, die Funkenstrecke  $AA'$  kann im Schatten oder im Lichte liegen.

Dass die beschriebene Hemmung der Funken- und Büschelentladungen den Lichtstrahlen (insbesondere denen von kurzer Wellenlänge) zuzuschreiben ist, lässt sich durch Einschlebung eines Schirmes zwischen die Lichtquelle und  $B'$  zeigen. Metalle, Holz, Glas, lassen die Wirkung nicht hindurchgehen, dagegen geht sie ohne wesentliche Schwächung durch klare Gypsplatten und dünne Glimmerblätter.

Als Lichtquelle dürfte am bequemsten brennendes Magnesium zu verwenden sein, nur muss man, wenn der Versuch mehrmals wiederholt werden soll, die Verbrennung vor einem gut wirkenden Abzuge vornehmen, da der Magnesia-rauch die Empfindlichkeit der Platte sehr schnell verdirbt und auch die Wirkung der Maschine beeinträchtigt. Elektrisches Funkenlicht, hervorgebracht durch die zwischen Zinkspitzen überschlagenden Funken einer durch ein kleines Inductorium geladenen Leydener Flasche, erwies sich seiner Intermittezz wegen nicht verwendbar, Bogenlicht, das ohne Zweifel die Erscheinung sehr stark zeigen wird, steht uns nicht zur Verfügung. Mit Sonnenlicht haben wir selbst zur jetzigen Jahreszeit (December) schon wahrnehmbare Wirkungen erzielt, wir glauben daher angeben zu dürfen, dass bei höherem Sonnenstande dasselbe, wie auch das vom blauen Himmel reflectirte Licht — sofern es direct, ohne durch Glas gegangen zu sein, verwandt wird — sich wirksam zeigen muss.

Als zu belichtende Flächen können (für Magnesiumbeleuchtung) mit Erfolg (in absteigender Empfindlichkeit) benutzt werden Scheiben von: Amalgamirtem und reinem (frisch abgeschmirgelm) Zink und amalgamirtem Messing. Rein abgeschmirgelte Platten von Messing und Kupfer, sowie amalgamirte Kupferflächen wirken nicht, verreibt man aber auf einer solchen eine Quantität schwach natriumhaltigen Quecksilbers, so wird sie sofort stark wirksam. Amalgamirte Messingplatten verdanken daher ihre Reactionsfähigkeit wohl nur ihrem Gehalt an Zink.

Schaltet man an irgend einer Stelle des Schliessungs-

kreises der Maschine eine Funkenstrecke ein, so treten auch bei Belichtung Funken zwischen  $B$  und  $B'$  auf, ebenso wenn man zwischen  $B$  und  $B'$  eine mit einer Durchbohrung versehene gefirniste Glasscheibe einführt. Die Funken schlagen dann, während  $B'$  vom Licht getroffen ist, von  $B$  aus durch die Oeffnung der Glasplatte hindurch.

Ohne Zweifel hängen die beschriebenen Erscheinungen mit dem unter dem Einfluss des Lichtes erfolgenden Austritte negativer Electricität aus der belichteten Polfläche zusammen. Befremdend scheint es indessen, dass die Wirkung auf eine Hemmung des Entladungsvorgangs zurückkommt. Die Versuche können in der That als Umkehrungen des von Hertz angegebenen bezeichnet werden. Wesentlich ist wohl der Umstand, dass durch Belichtung der negativen Polplatte die Ausbildung des positiven Büschellichtes erschwert wird. Der Gedanke liegt nahe, dass eine unter der Einwirkung des Lichtes von der negativen Platte ausgehende unsichtbare Entladung dasselbe in ähnlicher Weise hemmend beeinflusst, wie bei den bekannten Versuchen von Hittorf<sup>1)</sup> und E. Wiedemann<sup>2)</sup> das im luftverdünnten Raume von der Kathode ausgehende Glimmlicht die positive Entladung zurückdrängt.

Wolfenbüttel, im Januar 1890.

1) Hittorf, Wied. Electr. 4. 1. p. 441. 1885.

2) E. Wiedemann, Wied. Ann. 20. p. 767 ff. 1883.

**III. Ueber die Abhängigkeit des Magnetismus  
einiger Salze der Metalle der Eisengruppe von  
der Temperatur;  
von Paul Plessner.**

In seinen Untersuchungen über den Magnetismus der Salze<sup>1)</sup> bemerkt G. Wiedemann, dass die resultirenden Magnetisirungszahlen von einem Temperaturcoefficienten abhängig seien, für welchen er den vorläufigen gemeinsamen Werth 0,0036 angibt. Da jedoch diese Untersuchungen nicht direct auf die Ermittlung des Temperaturcoefficienten gerichtet waren, so erschien es wünschenswerth, die Richtigkeit jener Angaben an gesonderten Versuchsreihen zu prüfen. Für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für die mannigfache Unterstützung während derselben, fühlt sich der Verfasser Hrn. Geheimrath G. Wiedemann zu lebhaftem Danke verpflichtet.

Die Untersuchung erstreckte sich auf die wässerigen Lösungen von Eisenchlorid, Mangansulfat, Nickelsulfat und Kobaltnitrat, sowie auf die Sulfate von Mangan, Nickel und Kobalt in festem, wasserfreiem Zustande.<sup>2)</sup>

Befindet sich an einer bestimmten Stelle eines magnetischen Feldes, in welcher die Intensität des Magnetismus den Werth  $M$  habe, ein Theilchen einer magnetisirbaren Substanz, so muss das in demselben inducirte magnetische Moment, vorausgesetzt, dass nicht bereits eine magnetische Sättigung eingetreten ist, mit  $M$  proportional sein, also gleich  $K.M$  gesetzt werden können, wobei  $K$  von der Substanz, sowie von der Temperatur abhängt. Ebenso ist  $K.M^2$  ein Maass für die Anziehung, welche das Theilchen erfährt; mithin, wenn diese noch anderweitig gemessen und gleich  $A$  gefunden wird:

$$K = A/M^2.$$

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 126. p. 1. 1865 u. 135. p. 177. 1868.

2) Für festes  $\text{Fe}_2\text{Cl}_6$  standen die starken magnetischen Anziehungen mit den Dimensionen des Torsionsapparates zu sehr im Missverhältniss.

Um die Gesamtanziehung einer räumlich ausgedehnten Masse zu erhalten, müsste man eigentlich über den ganzen, von der magnetisirbaren Substanz eingenommenen Raum integrieren. Solange es sich jedoch, wie in der vorliegenden Arbeit, nur um relative Werthe handelt, genügt es augenscheinlich, die Intensität des Magnetismus an irgend einer bestimmten Stelle des Feldes zu messen, denn die zeitlichen Aenderungen der Intensität haben überall denselben relativen Werth.

Bei verschiedenen Temperaturen erhält man für  $K$  andere Werthe, die sich allgemein durch die Form:

$$K = K_0 (1 + \alpha t + \beta t^2 + \dots)$$

darstellen lassen. Das Ziel der Untersuchung war die Bestimmung der ersten Coëfficienten dieser Entwicklung.

Die Messung der magnetischen Anziehung geschah im wesentlichen nach der von Hrn. G. Wiedemann in den citirten Abhandlungen beschriebenen Methode, durch Torsion eines 0,26 mm dicken, hart gezogenen Neusilberdrahtes.<sup>1)</sup> Die zu untersuchende Substanz wurde in ein flaches Glas-kölbchen eingeschlossen, in welches von unten her das Gefäß eines Thermometers eingeschmolzen war. Ausser zur Messung der Temperatur diente das angeschmolzene Thermometer gleichzeitig als Träger des Kölbchens, da es sich als nöthig erwies, letzteres von unten zu halten und am Torsionsapparat zu befestigen.

Bei der Erwärmung des Kölbchens war darauf zu achten, dass:

1) die freie Beweglichkeit desselben nicht beeinträchtigt wurde;

2) Luftströmungen möglichst vermieden wurden und

3) die Temperatur nicht zu rasch sank.

Zu dem Ende schwebte das Kölbchen in einem Luftbade, welches von einem doppelwandigen Messingkasten umgeben war; zwischen den doppelten Wänden circulirte warmes Wasser. Der gleichfalls mit Wasser geheizte doppelte Deckel des Kastens konnte abgenommen, und dadurch der Hohlraum im Inneren desselben zugänglich gemacht werden.

1) Aluminiumbronce, deren Verwendung anfangs geplant war, erwies sich wegen zu bedeutender elastischer Nachwirkungen als unbrauchbar.

Nachdem man das Kölbchen so in das Luftbad gebracht hatte, dass sein Thermometer durch einen den doppelten Boden des Kastens durchsetzenden engen Schlitz wieder nach aussen hinausragte, wurde der gut schliessende Deckel aufgesetzt. Das Luftbad war dann bis auf den Schlitz am Boden rings vom Wasserbade umgeben, sodass die Circulation der erwärmten Luft innerhalb und ausserhalb auf ein Minimum beschränkt war. Entsprechend der kreisförmigen Bahn, welche das mittelst eines Armes am Torsionsapparat befestigte

Thermometer durchläuft, wenn der Apparat schwingt, war auch der Schlitz, durch den es hindurchging, kreisförmig. Thermometer und Scala waren in ein gläsernes Schutzrohr von elliptischem Querschnitt eingelassen, um die Weite des Schlitzes auf ihr geringstes Maass einschränken zu können.

Besser als aus der Beschreibung sind Form und Anordnung der Theile aus den Figuren 1—4 zu erschen. Fig. 1 stellt eine Seitenansicht nach Wegnahme einer Wand des Wasserbades dar. *W* ist das Wasserbad, *W'* der abnehmbare Deckel; das Wasser circulirte durch beide nacheinander. *R* ist ein Steigrohr, durch welches den Volumveränderungen des Wassers

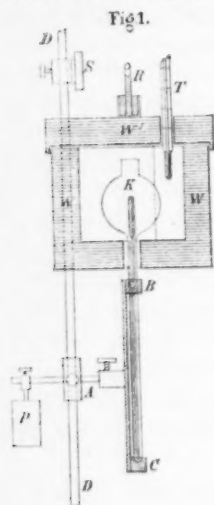


Fig. 3.

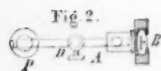
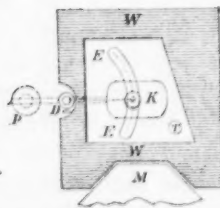


Fig. 4.



ca. 1:4.

mit der Temperatur Rechnung getragen wird, *T* ist ein Controlthermometer.



An dem am eigentlichen Torsionsdraht befestigten Messingdraht *DD* ist oben der Spiegel *S* angebracht, unten der Arm *A*, der einerseits das Kölbchen *K* zur Aufnahme der Salze und Lösungen, anderseits das Gegengewicht *P* trägt. Die Form des Kölbchens ist aus den Figuren 1, 3 und 4 zu erkennen; die Art, wie es vermöge des eingeschmolzenen Thermometers am Arm *A* mittelst der Klammern *B* und *C* befestigt ist, kommt in den Figuren 1—3 zur Darstellung. Fig. 4 zeigt das Wasserbad von oben gesehen, nach Wegnahme des Deckels; *EE* ist der kreisförmige Schlitz im Boden, *M* der vorderste Theil des Electromagnetkernes, für welchen ein besonderer Hohlraum im Wasserbade ausgespart ist.

Der Messingkasten wurde mit Filz bekleidet und befand sich nebst den Theilen des Torsionsapparates abwärts vom Drahte in einem Holzkasten mit Glasfenstern, der auseinander genommen werden konnte. Für die beweglichen Theile wurde jedoch nur ein ziemlich enger Spielraum abgemessen und durch Messingdrahtgaze abgegrenzt, der übrige Raum im Inneren des Holzkastens aber mit Watte ausgefüllt, um Luftströmungen zu unterdrücken. Die Schwingungen des Apparates wurden durch Petroleum gedämpft. Der durch ein Glasrohr geschützte Torsionsdraht war oben in einem Torsionskopfe befestigt, welcher vermittelt eines Schnurlaufes und einer Schraube ohne Ende vom Platze des Beobachters aus gedreht werden konnte.

Als Magnet diente ein horizontal liegender, 70 mm dicker, 300 mm langer Eisenkern, der in einer Spirale von 10.60 Windungen 2,5 mm dicken Kupferdrahtes steckte. Für das eine kegelstumpfförmige Ende des Kernes war im Wasserbade ein Hohlraum ausgespart, um Kölbchen und Magnet möglichst nahe aneinander bringen zu können. Der Electromagnet wurde durch eine Batterie von 8 grossen Dan., 4 Paar hintereinander, erregt; die Batterie blieb stets, auch wenn entmagnetisirt wurde, mit constantem Widerstand geschlossen, wodurch eine sehr befriedigende Constanz der Stromstärke erreicht wurde. Der innere Widerstand betrug etwa 0,6, der äussere 1,2 Ohm.

Die Intensität des Feldes wurde an einem in der Ver-

längerung der Axe des Magnets fest aufgestellten Magnetometer durch Spiegel und Fernrohr abgelesen. Durch einen variablen Zusatzwiderstand wurde erreicht, dass die Maximalschwankung der Intensität unter 1 Proc. blieb. Die Messungen wurden in einem Souterrainzimmer des physikalischen Institutes der Universität Leipzig ausgeführt; alle fest aufzustellenden Apparatentheile waren auf besonderen, in die Grundmauern des Gebäudes eingelassenen Consolen angebracht.

Unter den an den Messungen nachträglich angebrachten Correcturen müssen zwei erwähnt werden, die sich auf die Unveränderlichkeit des Ortes, den das Kölbchen im magnetischen Felde einnehmen soll, beziehen. Um die magnetische Anziehung zu messen, tordirt man, bis ein am Torsionsapparat angebrachter Spiegel im Fernrohr einen bestimmten Punkt einer Scala zeigt; die gleiche Spiegelablesung hat eine gleiche Stellung des Kölbchens im magnetischen Felde zur Voraussetzung.

Wird entmagnetisirt, so dreht sich der Apparat um den Torsionswinkel, der nunmehr abgelesen werden kann. Eine genaue Einstellung ist jedoch hier schon deswegen nicht zu erreichen, weil die allmähliche Aenderung der Temperatur ein möglichst rasches Arbeiten erfordert. Die deswegen nöthigen Correcturen wurden empirisch durch Beobachtungen bei constanter (Zimmer-) Temperatur ermittelt. Auf diese Weise wurde es zugleich möglich, Fehler, die aus der elastischen Nachwirkung des tordirten Drahtes resultirten, zu eliminiren, da man unter Verzicht auf eine genaue Einstellung nun eine Reihe von Beobachtungen hintereinander machen konnte, ohne die Ruhelage des Drahtes willkürlich zu ändern.

Neben der Verschiebung des Kölbchens gegen das magnetische Feld musste aber auch der Verschiebung des magnetischen Feldes gegen das Kölbchen Rechnung getragen werden. Der Kern des Electromagnets erwärmt sich durch die Nachbarschaft des warmen Messingkastens allmählich bis auf etwa  $10^{\circ}$  über die Zimmertemperatur und dehnt sich dementsprechend aus. Eine axiale Durchbohrung ermöglichte es, seine Temperatur an verschiedenen Punkten durch Ein-

führung eines Thermometers zu bestimmen. Das rückwärtige Ende des Kernes wurde in der sehr schweren Magnetisirungsspirale festgekeilt, und die Verschiebung der Vorderfläche aus der mittleren Temperaturerhöhung berechnet.

Das Kölbchen war an einem 43 mm langen, zur Magnetaxe ziemlich senkrechten Arm befestigt; die Entfernung des Spiegels von der gleichfalls in Millimetern getheilten Scala betrug 2860 Scalentheile. Mithin bedeutet eine relative Verschiebung des Fadenkreuzes im Fernrohrbilde um 1 Scalenth. eine Verschiebung des Kölbchens um  $43/(2 \cdot 2860) = 0,00752$  mm im magnetischen Felde. Der 300 mm lange Eisenkern dehnt sich bei einer Erwärmung um  $1^\circ \text{C.}$  um  $300 \cdot 0,0012$  mm, d. i. 0,00360 mm aus, was durch eine gleichgerichtete Verschiebung des Kölbchens, die im Fernrohr  $0,00360/0,00752 = 0,48$  Scalenth. beträgt, compensirt werden würde. Um vergleichbare Werthe zu erhalten, wurde die Länge des Magnets stets auf eine Temperatur von  $0^\circ$  reducirt.

Eine Correctur wegen der Intensitätsänderung des Erdmagnetismus anzubringen, schien in Rücksicht auf die Grössenordnung der übrigen Fehler (namentlich in der Temperaturbestimmung) nicht angezeigt. An magnetisch unruhigen Tagen wurden die Beobachtungen ausgesetzt.

Endlich muss noch eines Umstandes gedacht werden, durch welchen die Genauigkeit der Resultate ein wenig beeinträchtigt wird. Die zur Messung gelangende Anziehung ist die Differenz zweier Wirkungen, nämlich der magnetischen Anziehung des Salzes und der diamagnetischen Abstossung des Lösungsmittels, des Glaskölbchens, des Quecksilbers im Thermometer etc. Wurde das Kölbchen mit destillirtem Wasser gefüllt ins magnetische Feld gebracht, so erlitt es eine Abstossung von etwa 1,5 Scalenth., d. i.  $1 - \frac{1}{3}$  Proc. der Anziehung bei verschiedenen Salzen. Es ist nun zu beachten, dass auch die diamagnetische Abstossung sich mit der Temperatur ändert. Es ist aber bei den gegebenen Dimensionen schlechterdings nicht möglich, eine Aenderung, die nur einige Procent von einer so kleinen Grösse beträgt, durch directe Messung hinreichend genau zu bestimmen, da sie durchaus in die Grenze der Beobachtungsfehler fällt.

Wir sind im Folgenden von der Annahme ausgegangen, dass

die diamagnetische Abstossung sich etwa in demselben Verhältniss mit der Temperatur ändern wird, wie die magnetische Anziehung. In diesem Falle bedingt die Vernachlässigung der Abstossung keinen Fehler. Wäre jedoch die Aenderung des Diamagnetismus gleich Null, so müssten unsere Resultate um 0,3—0,8 Proc. erhöht werden.<sup>1)</sup>

#### A. Versuche mit gelösten Salzen.

Wie man aus den nachstehend mitgetheilten Beobachtungsergebnissen ersehen wird, genügt es, für eine Darstellung der Magnetisirungszahlen der Salzlösungen  $K = K_0(1 + \alpha t)$  zu setzen. Der Coefficient  $\alpha$  kann insofern für alle untersuchten Salzlösungen als gleich angenommen werden, als die vorhandenen Abweichungen den mittleren Fehler einer einzelnen Beobachtungsreihe nicht übertreffen.

##### I.

Versuch mit 20,081 g Eisenchloridlösung. Der Gehalt der Lösung wurde durch Fällung ermittelt und ergab 7,032 g wasserfreies Salz oder 2,423 g Metall.

| $t$    | $A/M^2$ | $t$   | $A/M^2$ | $-\alpha$ |
|--------|---------|-------|---------|-----------|
| 10,45° | 30547   | 60,8° | 25012   | 0,003 495 |
| 10,45  | 30582   | 58,5  | 25282   | 0,003 485 |
| 10,45  | 30676   | 54,9  | 25660   | 0,003 500 |
| 10,45° | 30662   | 51,5  | 25915   | 0,003 591 |
|        |         | 47,5  | 26439   | 0,003 536 |
|        |         | 44,7  | 26763   | 0,003 528 |
|        |         | 42,25 | 26933   | 0,003 627 |
|        |         | 39,9  | 27339   | 0,003 489 |
|        |         | 37,8  | 27489   | 0,003 603 |
|        |         | 35,9  | 27720   | 0,003 563 |

Im Mittel  $-\alpha = 0,003\,542 \pm 0,000\,043$

##### II.

Versuch mit 19,064 g Mangansulfatlösung. Gehalt an wasserfreiem Salz 4,466 g, an Metall 1,627 g.

1) Bezeichnen  $\alpha$  und  $\alpha_1$  die Temperaturcoefficienten in der Anziehung und Abstossung,  $M_0$  und  $D_0$  Anziehung und Abstossung bei 0°,  $A_t$  und  $A_0$  die gemessenen Anziehungen bei  $t^\circ$  und 0°, so ist:

$$\frac{A_t}{A_0} = \frac{M_0(1 + \alpha t) - D_0(1 + \alpha_1 t)}{M_0 - D_0} = 1 + \alpha t + \frac{D_0}{M_0 - D_0}(\alpha - \alpha_1)t.$$

Mithin: 
$$\frac{A_t - A_0}{t \cdot A_0} = \alpha + \frac{D_0}{M_0 - D_0}(\alpha - \alpha_1).$$

Das letzte Glied misst den gemachten Fehler.

| $t$  | $A/M^2$ | $t$   | $A/M^2$ | $-\alpha$ |
|------|---------|-------|---------|-----------|
| 8,0° | 21486   | 58,0° | 17547   | 0,003 562 |
| 8,0  | 21486   | 57,7  | 17564   | 0,003 568 |
| 8,0° | 21486   | 56,5  | 17660   | 0,003 567 |
|      |         | 54,2  | 17870   | 0,003 540 |
|      |         | 52,4  | 17978   | 0,003 572 |
|      |         | 49,8  | 18143   | 0,003 595 |
|      |         | 48,8  | 18231   | 0,003 594 |

Im Mittel  $-\alpha = 0,003\,571 \pm 0,000\,014$

## III.

Versuch mit 18,746 g Nickelsulfatlösung. Gehalt an wasserfreiem Salz 4,341 g, an Metall 1,552 g.

| $t$  | $A/M^2$ | $t$   | $A/M^2$ | $-\alpha$ | $p$           |
|------|---------|-------|---------|-----------|---------------|
| 9,0° | 5647    | 62,5° | 4566    | 0,003 477 | $\frac{1}{2}$ |
| 9,0  | 5673    | 62,2  | 4610    | 0,003 358 | $\frac{1}{2}$ |
| 9,0  | 5632    | 61,5  | 4526    | 0,003 667 | 1             |
| 9,0° | 5651    | 60,0  | 4600    | 0,003 531 | 1             |
|      |         | 58,1  | 4618    | 0,003 566 | 1             |

Im Mittel  $-\alpha = 0,003\,545 \pm 0,000\,073$ .

IV<sub>a</sub>.

Versuch mit 22,181 g Kobaltnitratlösung. Gehalt an wasserfreiem Salz 10,350 g, an Metall 3,337 g.

| $t$  | $A/M^2$ | $t$   | $A/M^2$ | $-\alpha$ | $p$           |
|------|---------|-------|---------|-----------|---------------|
| 8,9° | 26052   | 60,9° | 21421   | 0,003 324 | $\frac{1}{2}$ |
|      |         | 59,0  | 21463   | 0,003 409 | $\frac{1}{2}$ |
|      |         | 56,9  | 21548   | 0,003 490 | 1             |
|      |         | 47,7  | 22201   | 0,003 685 | 1             |
|      |         | 45,8  | 22500   | 0,003 576 | 1             |
|      |         | 44,3  | 22619   | 0,003 603 | 1             |

Im Mittel  $-\alpha = 0,003\,544 \pm 0,000\,094$ ,

IV<sub>b</sub>.

| $t$   | $A/M^2$ | $t$   | $A/M^2$ | $-\alpha$ |
|-------|---------|-------|---------|-----------|
| 17,9° | 24653   | 61,9° | 20689   | 0,003 433 |
| 17,9  | 24702   | 59,8  | 20766   | 0,003 528 |
| 17,9  | 24617   | 58,0  | 21036   | 0,003 437 |
| 17,9° | 24657   | 56,1  | 21049   | 0,003 585 |
|       |         | 54,2  | 21382   | 0,003 437 |
|       |         | 52,3  | 21387   | 0,003 607 |
|       |         | 50,3  | 21548   | 0,003 638 |
|       |         | 48,5  | 21706   | 0,003 655 |
|       |         | 46,9  | 21835   | 0,003 686 |
|       |         | 45,6  | 21974   | 0,003 670 |

Im Mittel  $-\alpha = 0,003\,567 \pm 0,000\,087$

Wie man erkennt, ist die grösste Differenz in den Werthen von  $\alpha$  zwischen Eisen und Mangan, nämlich 0,0,29, also kleiner als der mittlere Fehler in der Mehrzahl der Bestimmungen. Wo die Gewichte der einzelnen Beobachtungen als unter sich gleich anzusehen sind, ist nichts darüber bemerkt. Nur wo im Verlauf einer Beobachtungsreihe minderwerthige Beobachtungen vorkommen, sind die relativen Gewichte ( $p$ ) eingetragen. Als gemeinsamen mittleren Werth für  $-\alpha$  erhält man:

$$0,003\,555\,4 \pm 0,0,124.$$

Diese Abnahme der Magnetisirbarkeit mit steigender Temperatur hält also mit der Abnahme des Leitungswiderstandes vieler Lösungen ziemlich gleichen Schritt.

### B. Versuche mit festen Salzen.

#### V<sub>a</sub>.

Versuch mit 17,722 g Mangansulfat; fest, wahrscheinlich im Laufe der Untersuchung theilweis wasserfrei geworden.

| $t$               | $A/M^2$ | $t$               | $A/M^2$ | $-\alpha$ |
|-------------------|---------|-------------------|---------|-----------|
| 19,1 <sup>0</sup> | 51287   | 43,2 <sup>0</sup> | 46731   | 0,003 491 |
| 19,1              | 51478   | 52,7              | 44920   | 0,003 484 |
| 19,1              | 51345   | 51,8              | 45554   | 0,003 242 |
| 19,1              | 51335   | 52,5              | 45427   | 0,003 282 |
| 19,1 <sup>0</sup> | 51361   | 55,7              | 45134   | 0,003 115 |
|                   |         | 56,7              | 44912   | 0,003 139 |
|                   |         | 57,5              | 44816   | 0,003 121 |
|                   |         | 57,7              | 44824   | 0,003 102 |
|                   |         | 57,8              | 44799   | 0,003 105 |
|                   |         | 57,7              | 44789   | 0,003 103 |
|                   |         | 57,5              | 44840   | 0,003 110 |

Mittel aus den 7 letzten Werthen  $-\alpha = 0,003\,114 \pm 0,0,10$

#### V<sub>b</sub>.

24,402 g Mangansulfat, fest, bei 250° C. getrocknet.

| $t$               | $A/M^2$ | $t$               | $A/M^2$ | $-\alpha$ |
|-------------------|---------|-------------------|---------|-----------|
| 19,3 <sup>0</sup> | 34715   | 61,7 <sup>0</sup> | 30503   | 0,002 712 |
|                   |         | 60,9              | 30597   | 0,002 703 |
|                   |         | 56,0              | 31090   | 0,002 702 |
|                   |         | 54,0              | 31194   | 0,002 696 |
|                   |         | 51,8              | 31463   | 0,002 677 |

Mittel  $-\alpha = 0,002\,698 \pm 0,0,9.$

## Vc.

| $t$   | $A/M^2$ | $t$   | $A/M^2$ | $-\alpha$ |
|-------|---------|-------|---------|-----------|
| 19,3° | 34715   | 60,6° | 30448   | 0,002 697 |
|       |         | 58,2  | 30588   | 0,002 693 |
|       |         | 56,0  | 30926   | 0,002 677 |
|       |         | 53,6  | 31187   | 0,002 656 |
|       |         | 51,5  | 31369   | 0,002 666 |

Mittel  $-\alpha = 0,002\,678 \pm 0,0,12$ .Gesamtmittel aus Vb und Vc  $-\alpha = 0,002\,688 \pm 0,0,15$ .

## VIa.

20,154 g Nickelsulfat, fest, bei 250° C. getrocknet.

| $t$   | $A/M^2$ | $t$   | $A/M^2$ | $-\alpha$ |
|-------|---------|-------|---------|-----------|
| 12,2° | 20704   | 59,7° | 16573   | 0,003 996 |
|       |         | 58,3  | 16980   | 0,003 725 |
|       |         | 56,7  | 17191   | 0,003 726 |
|       |         | 55,1  | 17363   | 0,003 596 |
|       |         | 53,7  | 17516   | 0,003 550 |
|       |         | 52,2  | 17666   | 0,003 486 |
|       |         | 49,6  | 17929   | 0,003 434 |
|       |         | 48,3  | 18041   | 0,003 415 |
|       |         | 47,0  | 18126   | 0,003 428 |
|       |         | 45,9  | 18259   | 0,003 360 |
|       |         | 44,8  | 18371   | 0,003 317 |
|       |         | 42,0  | 18563   | 0,003 329 |
|       |         | 41,1  | 18677   | 0,003 254 |
|       |         | 40,4  | 18727   | 0,003 252 |
|       |         | 39,6  | 18818   | 0,003 195 |

## VIb.

| $t$   | $A/M^2$ | $t$   | $A/M^2$ | $-\alpha$ |
|-------|---------|-------|---------|-----------|
| 13,2° | 20791   | 58,9° | 16728   | 0,004 048 |
|       |         | 54,4  | 17544   | 0,003 610 |
|       |         | 52,7  | 17798   | 0,003 488 |
|       |         | 51,65 | 17906   | 0,003 449 |
|       |         | 50,3  | 18001   | 0,003 438 |
|       |         | 49,1  | 18123   | 0,003 414 |
|       |         | 47,9  | 18255   | 0,003 359 |

Wie man aus diesen beiden Reihen für festes Nickelsulfat erkennt, hat hier  $\alpha$  nicht mehr den Charakter einer Constanten, sondern ist selbst wieder als eine Function der Temperatur aufzufassen. Das bedeutet, dass die Entwicklung  $K = K_0(1 + \alpha t)$  unzureichend ist. Nimmt man jedoch noch ein Glied  $\beta t^2$  hinzu, so liefert die Ausgleichungsrechnung



nung sehr befriedigende Darstellungen für die beiden Beobachtungsreihen. Für die erste erhält man:

$$K = K_0 (1 - 0,001504 t - 0,0,3324 t^2),$$

für die zweite:

$$K = K_0 (1 - 0,0,966 t - 0,0,4017 t^2).$$

Die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen von  $A/M^2$  sind sämmtlich kleiner als 0,25 Proc.;  $K_0$  nach den beiden Formeln ergibt resp.

21198 und 21210.

## VII.

Versuch mit 22,079 g Kobaltsulfat, fest, bei 250° C. getrocknet.

| $t$    | $A/M^2$ | $t$   | $A/M^2$ | $-\alpha$ |
|--------|---------|-------|---------|-----------|
| 12,05° | 42557   | 59,5° | 36604   | 0,002 850 |
|        |         | 56,8  | 37027   | 0,002 808 |
|        |         | 54,7  | 37617   | 0,002 693 |
|        |         | 52,8  | 37745   | 0,002 683 |
|        |         | 51,0  | 37801   | 0,002 774 |
|        |         | 49,1  | 38140   | 0,002 708 |

Mittel  $-\alpha = 0,002753 \pm 0,0,58$ .

Von der erfreulichen Uebereinstimmung der Temperaturcoëfficienten, wie wir sie für die Lösungen der verschiedenen Salze nachgewiesen haben, ist bei den in festem Zustande untersuchten Salzen nichts mehr zu erkennen. Wenn auch die Ergebnisse hier mit grösseren Fehlern behaftet sind, die namentlich durch die Schwierigkeit der Temperaturbestimmung bedingt sein dürften, so zeigen sich doch besonders bei Nickelsulfat und Kobaltsulfat Unregelmässigkeiten, welche über die Grenze der Beobachtungsfehler weit hinausgehen.

Leipzig, im December 1889.

#### IV. Die anomale Rotationsdispersion in Eisen, Kobalt und Nickel; von Walter Lobach.

(Inaugural-Diss. zur Erlangung der Doctorwürde an der Univ. Berlin.)

Ueber die electromagnetische Drehung der Polarisations-ebene des Lichtes beim Durchgang durch dünne Schichten von Eisen, Kobalt und Nickel sind nach den ersten fundamentalen Versuchen von Hrn. Prof. Kundt<sup>1)</sup> weitere experimentelle Untersuchungen ausser von diesem selbst nur von Hrn. du Bois<sup>2)</sup> angestellt worden. Hr. Prof. Kundt hat genauer nur die wesentlichen magnetischen Eigenschaften des Eisens festgestellt und sich für Kobalt und Nickel auf qualitative Messungen beschränkt. Hr. du Bois hat alsdann auch die beiden letzteren Metalle genaueren Messungen unterzogen.

Die Untersuchungen beziehen sich vorwiegend auf die Abhängigkeit der Drehung von der Feldintensität und auf die Maximaldrehung pro Längeneinheit. Ferner hat Hr. Prof. Kundt<sup>3)</sup> auch schon auf das Vorhandensein einer anomalen Rotationsdispersion im Eisen hingewiesen und auch bei Kobalt und Nickel eine solche zu beobachten geglaubt. Auf Anregung des Hrn. Prof. Kundt unternahm ich es daher, die Rotationsdispersion in den drei genannten Metallen eingehenderen Untersuchungen zu unterwerfen.

##### Versuchsanordnung.

Da bei der besonders für Nickel und Kobalt nur geringen Rotationsdispersion die Untersuchung grosse Genauigkeit erfordert, so musste die Anfangs in Anwendung gebrachte Beobachtungsmethode nach Hrn. Lüdgtge<sup>4)</sup> aufgegeben werden; dieselbe ist besonders im blauen Theile des Spectrums keiner sehr grossen Genauigkeit fähig, da in diesen Gebieten die beiden Fransen, auf deren Coincidenz eingestellt wird, breit und verwaschen erscheinen. Vollständig befrie-

1) Kundt, Wied. Ann. **23**. p. 228 1884 u. **27**. p. 191. 1886.

2) du Bois, Wied. Ann. **31**. p. 941. 1887.

3) Kundt, Wied. Ann. **23**. p. 237. 1884.

4) Lüdgtge, Pogg. Ann. **137**. p. 271. 1869.

digende Genauigkeit dagegen gewährte ein Halbschattenapparat, dessen Empfindlichkeit mit Hülfe eines Lippich'schen Doppelnicols in der bekannten Weise regulirt werden konnte. Die aus dem Analysator austretenden Strahlen wurden vor ihrem Eintritt in das Auge durch ein Wernicke'sches Flüssigkeitsprisma mit gerader Durchsicht zerlegt, so dass die Drehungen an verschiedenen Wellenlängen mit Hülfe eines mit Ocularspalt versehenen Fernrohrs beobachtet werden konnten. Die endgiltigen Versuche wurden nur mit Sonne gemacht, Vorversuche im Winter, als dem Verfasser Sonne nicht zur Verfügung stand, mit einem Linnemann'schen Brenner. Die von diesem ausgehenden Strahlen wurden von einer Linse auf der vorderen Fläche des Analysators concentrirt, nachdem sie zuvor das Doppelnicol und die zwischen den Polen eines Rühmkorff'schen Electromagnets befindliche Metallschicht durchsetzt hatten.

Nähere Aufschlüsse über die einzelnen Theile des optischen Apparates liefert die Fig. 1. Auf einem ca. 1 m

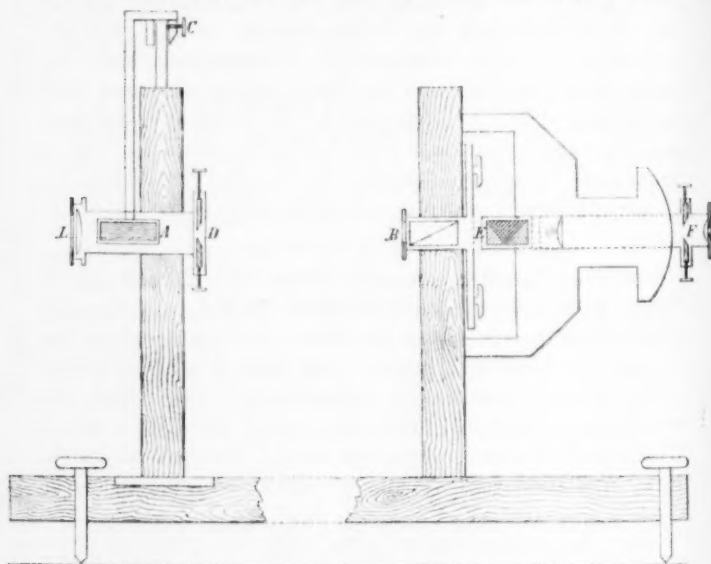


Fig. 1.

langen Holzbrette, dessen vier Ecken behufs gehöriger Festlegung auf Stellschrauben ruhten, befanden sich an den beiden Enden in genau senkrecht stehenden Holzwänden der Polarisator *A* und Analysator *B*. Die Wand, welche den Polarisator trug, war auf zwei Metallschienen verschiebbar, um für eine eventuelle Verstellung der Rollen des Magnets den nöthigen Spielraum zu gewähren. Der Polarisator bestand aus dem Lippich'schen Doppelnicol, dessen Winkel mit Hülfe eines Zeigers *C* von der senkrechten Nullstellung nach beiden Seiten um  $15^\circ$  variirt werden konnte. Unmittelbar vor dem Doppelnicol (Seite der Lichtquelle) war eine Linse, deren Brennweite gleich der halben Länge des Apparates war und so das Bild einer um die ganze Länge des Apparates vom Polarisator entfernten Lichtquelle auf den Analysator concentrirte. Hinter dem Doppelnicol (nach dem Analysator hin) begrenzte ein verstellbarer, horizontaler Objectivspalt *D* das Lichtfeld. Die gegenüberstehende Wand trug zunächst den Analysator. Derselbe war mit einem Kreise versehen, der auf halbe Grade getheilt war, sodass mit Hülfe zweier 50theiliger Nonien auf  $0,01^\circ$  mit Genauigkeit abgelesen werden konnte. Die feinere Einstellung geschah mit Mikrometerschraube; letztere wurde stets benutzt, dagegen wurden die Ablesungen nur immer an einem der Nonien gemacht, da die aus einer Excentricität des sehr genau gearbeiteten Theilkreises entspringenden Fehler gegenüber den sonstigen Beobachtungsfehlern vollständig zu vernachlässigen waren. Weiter befand sich in einem an die Holzwand angeschraubten Metallgestell das geradsichtige Flüssigkeitsprisma *E*, wie es von Hrn. Wernicke angegeben ist. Dasselbe zeigt bekanntlich trotz seiner sehr starken Dispersion noch recht beträchtliche Lichtstärke auch in dem nach dem Violett hin liegenden Theile des Spectrums. Fühlbar machte sich dagegen die erhebliche Aenderung des Brechungsexponenten mit der Temperatur; doch war dieselbe nicht so stark, dass während einer Ablesungsreihe an einer Linie des Spectrums die Einstellung hätte erneuert werden müssen. Vor diesem Prisma befand sich endlich das um eine horizontale Axe drehbare Fernrohr *F*, welches mit seinem ebenfalls verstellbaren Ocularspalt auf die verschiedenen Theile

des Spectrums vermittelt einer Stellschraube gerichtet werden konnte. Die Breite des Ocularspaltes wurde ebenso wie die des Objectivspaltes auf etwa 1—2 mm gewählt, an der sehr lichtschwachen *G*-Linie aber oft bis zu 3 und 4 mm erweitert.

Die Genauigkeit der einzelnen Einstellungen waren je nach der Winkelstellung des Lippich'schen Apparates und nach der Helligkeit der betreffenden Partie des Spectrums sehr verschieden. Bei Sonnenlicht wurde für Spiegel von mittlerer Dicke das günstigste Verhältniss in einer Stellung des Lippich'schen Apparates auf  $5^\circ$  gefunden, der mittlere Einstellungsfehler betrug dann meist nicht über 2 Minuten, während bei sehr dicken Spiegeln, wo im Violett die Winkelstellung auf  $10^\circ$  vergrößert werden musste, Fehler bis  $6'$  nicht selten waren. Daher zeigen die Mittelwerthe dieser Linie in den Tabellen auch die grössten Abweichungen.

Es wurde ein Rühmkorff'scher Electromagnet bekannter Construction benutzt. Die conischen vorn abgerundeten Polstücke waren in ca. 6 mm lichter Weite durchbohrt und wurden auf 6 mm einander genähert. Den Strom lieferte eine Siemens'sche Dynamomaschine. Die Intensität desselben betrug ungefähr 25 Ampère. Die Verschiebung der Spiegel zwischen den Polen wurde durch eine automatische Vorrichtung bewirkt und so eingerichtet, dass stets genau dieselben Stellen des Spiegels ins Gesichtsfeld gerückt werden konnten. Die Grösse desselben betrug etwa 5 bis 6 qmm.

Die Feldintensität konnte trotz des sehr starken Stromes wegen der verhältnissmässig kleinen Dimensionen des Magnets nicht über 15000 C.-G.-S. gebracht werden. Für Kobalt und Nickel übertrifft diese Intensität die nach Hrn. du Bois<sup>1)</sup> zur Maximaldrehung erforderliche bereits erheblich, für Eisen dagegen liegt die Maximaldrehung nach Hrn. du Bois' theoretischen Erwägungen erst bei einer Feldintensität von 17440 C.-G.-S., indessen macht Hr. du Bois bereits darauf aufmerksam, dass den Kundt'schen Versuchen zufolge zur Maximaldrehung eine geringere Feldintensität

1) du Bois, Wied. Ann. 31. p. 961. 964. 1887.

(ca. 15000) erforderlich zu sein scheine. Besonders charakteristisch in diesem Sinne erscheint die erste der 3 Kundtschen<sup>1)</sup> Tabellen.

| Intensität des magnetischen Feldes<br>Dimension: $\text{cm}^{-1/2} \text{ gr}^{1/2} \text{ sec}^{-1}$ |       | Drehung in Eisen |
|---|-------|------------------|
| Spiegel Nr. 1.  | 4420  | 1,72°            |
| "   | 8060  | 3,47             |
| "   | 14100 | 4,41             |
| "   | 18500 | 4,45             |
| "   | 30100 | 4,36             |

An diesem Spiegel (es ist der dünnste der drei untersuchten) tritt die Maximaldrehung offenbar schon bei einer Feldintensität von ca. 14000 C.-G.-S. ein. Da nun in der vorliegenden Arbeit nur Spiegel von geringerer Dicke zur Untersuchung gelangten, so war von vornherein anzunehmen, dass mit den zur Verfügung stehenden Mitteln eine Drehung bewirkt werden konnte, die der maximalen jedenfalls sehr nahe kommt.

Ausserdem aber wurde zur Controle noch folgender Versuch gemacht. Unmittelbar nach dem Schliessen des Stromes zeigte das Feld seine grösste Intensität, nahm dann rasch ab und blieb nach Verlauf von etwa 5 Secunden auf der constanten Stärke von 15000 C.-G.-S. Diese Schwächung hatte darin ihren Grund, dass der im Verhältniss zur Dynamomaschine nur schwache Gasmotor nach Schliessung des Stromes die stark belastete Maschine nur sehr kurze Zeit in rascher Umdrehung zu erhalten im Stande war, dann seine Bewegung verlangsamte, bis sich ein stationärer Zustand gebildet hatte. Es wurden nun eine Reihe von sehr raschen Einstellungen unmittelbar nach Schluss des Stromes gemacht. Hierbei zeigte sich stets eine allerdings erhebliche Zunahme der Drehung im Glas, während die Drehung im Eisen innerhalb der Fehlergrenzen vollständig die gleiche blieb.

Die Feldintensität wurde gemessen durch die Drehung in einer etwa 4,5 mm dicken Glasplatte. Dieselbe war ein für allemal mit Schwefelkohlenstoff verglichen worden und mit Hülfe der von Lord Rayleigh gefundenen Verdet'-

1) Kundt, Wied. Ann. 27. p. 195. 1886.

schen Constante desselben für die *D*-Linie 0,0042 berechnet.

#### Herstellung der Metallschichten.

Die zu verwendenden dünnen Metallschichten wurden auf electrolytischem Wege auf ca. 4 mm dickes Glas niedergeschlagen, dessen eine Seite durch Einbrennen einer sehr dünnen durchsichtigen Platinschicht leitend gemacht war. Hierbei musste die Vorsicht einer sehr langsamen Abkühlung der gebrannten Glasplatten beobachtet werden, da selbstverständlich jede Doppelbrechung des Glases zu vermeiden war. Es wurden darum erst sämtliche Platinspiegel auf ihre Doppelbrechung hin untersucht und nur solche Stücke gewählt, die gänzlich frei von optischen Unregelmässigkeiten waren.

Das Eisen wurde nach dem bekannten Verfahren von Varrentrapp niedergeschlagen.

Die Kobaltspiegel wurden aus einem Bad von schwefelsaurem Kobalt mit Zusätzen von Ammoniak, resp. Citronensäure hergestellt;

die Nickelspiegel aus einem Bad von schwefelsaurem Nickeloxydulammoniak.

Ausserdem wurden Nickelspiegel aus einem im Handel fertig käuflichen Nickelbad von Ehrenberg und Zellweger in Uster niedergeschlagen. Die 5 untersuchten Spiegel zeigten indessen nur etwa die halbe Drehung der aus reinem Nickelsalz gewonnenen.

#### Dickenbestimmung der Schichten.

Da nicht nur die relative Rotationsdispersion der einzelnen Spiegel, sondern vor allem die absolute Drehung pro Längeneinheit für die verschiedenen Punkte des Spectrums von Interesse ist, so kam es auf eine exacte Methode der Dickenbestimmung an. Es wurde zu diesem Zwecke eine optische Methode gewählt, bei welcher die neuerdings im hiesigen Laboratorium bestimmten Absorptionsconstanten der Metalle benutzt werden.

Ist nämlich *K* die Absorptionsconstante eines Metalles, *s* die durch Absorption verursachte Schwächung des Lichtes



nach dem Durchgang durch die Metallschicht, so ist die Dicke der Schicht:

$$D = \frac{\log \text{nat } s}{K}.$$

Behufs Elimination der Reflexion wurden bisweilen Doppelschichten desselben Metalles untersucht und Drehung und Absorption ihrer Dickendifferenz beobachtet. Da jedoch die drei genannten Metalle, vorzüglich aber Eisen und Kobalt, in dünneren Schichten fast das gleiche Reflexionsvermögen besitzen wie Platin, so konnte meistens von der Herstellung solcher Doppelschichten Abstand genommen und die Absorption der einzelnen Schichten im Vergleich zu der des platinirten Glases direct gemessen werden.

Ein kurzer Ueberschlag zeigt, dass die hierbei auftretenden Fehler eine sehr erhebliche Grösse nicht erreichen können. Angenommen, das Reflexionsvermögen des einen Spiegels sei 50 Proc., das des anderen 55 Proc., so wird hierdurch ein Fehler in der Bestimmung von  $s$  um etwa 10 Proc. des Gesamtbetrages herbeigeführt.

Es ist aber:

$$D = \frac{\log \text{nat } s}{K}, \quad dD = \frac{ds}{sK},$$

also für  $ds = 0,1 s$  erhält man:

$$dD = \frac{0,1}{K} \quad \text{für } K = 40000, \quad dD = \frac{1}{400\,000} = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ cm.}$$

Dies verursacht bei einem Spiegel von mittlerer Dicke (ca.  $60 \cdot 10^{-7}$  cm) einen Fehler von 4 Proc. Da jedoch bei einigen Spiegeln die Platinschicht, bei anderen derselben Art die Metallschicht stärker reflectirte, so wirkt dieser Fehler auf das Resultat bald vergrössernd, bald verkleinernd, sodass es schliesslich nur unerheblich davon beeinflusst sein wird.

Die photometrischen Messungen wurden an einem Sektorenphotometer vorgenommen, welches besonders den Vorzug grosser Lichtstärke mit hinreichender Genauigkeit bei starken Absorptionen verbindet.

Die drei benutzten Absorptionsconstanten sind nach Untersuchungen des Hrn. Rathenau (für rothes Licht):

Eisen:  $K = 34600$ ,

Kobalt:  $K = 36000$ .

Nickel:  $K = 40000$ ,

Die Werthe von  $K$  für Eisen und Nickel sind combinirt aus sieben an verschiedenem Material gemachten Einzelbeobachtungen und daher genauer festgestellt, als diejenigen für Kobalt, welchem nur vier Bestimmungen zu Grunde liegen. Diesem Umstande mag es zuzuschreiben sein, dass die specifischen Drehungen für Eisen und Nickel mit den Resultaten von Kundt und du Bois besserer Uebereinstimmung sind, als diejenigen für Kobalt. Die folgende Tabelle liefert eine Uebersicht über die für die Dickenbestimmungen angeordneten Beobachtungen:

| Eisen. |       |   | Kobalt. |       |   |
|--------|-------|---|---------|-------|---|
| Nr.    | $s$   | $D = \frac{\log \text{nat } s}{K} 10^{-7} \text{ cm}$ | Nr.     | $s$   | $D = \frac{\log \text{nat } s}{K} 10^{-7} \text{ cm}$ |
| 1      | 0,379 | 28  | 1       | 0,255 | 38  |
| 2      | 0,308 | 34  | 2       | 0,180 | 56,5  |
| 3      | 0,171 | 51  | 3       | 0,083 | 69  |
| 4      | 0,121 | 61  | 4       | 0,062 | 77  |
| 5      | 0,113 | 63  | 5       | 0,084 | 94  |
| 6      | 0,079 | 73  | 6       | 0,032 | 95  |
| 7      | 0,058 | 82  | 7       | 0,028 | 99  |

## Nickel.

| Nr. | $s$   | $D = \frac{\log \text{nat } s}{K} 10^{-7} \text{ cm}$ |
|-----|-------|---|
| 1   | 0,347 | 26,5  |
| 2   | 0,218 | 38  |
| 3   | 0,125 | 52  |
| 4   | 0,061 | 70  |
| 5   | 0,052 | 74  |
| 6   | 0,049 | 75  |
| 7   | 0,013 | 109   |

## Beobachtungen und Resultate.

Die endgültigen Beobachtungen wurden durchweg mit Sonnenlicht gemacht. Dieselben wurden an vier Punkten des Spectrums vorgenommen, nämlich bei den Wellenlängen:

$$\begin{array}{l|l} \lambda = 670 \text{ (Lithium } \alpha), & \lambda = 486 \text{ (F-Linie),} \\ \lambda = 590 \text{ (D-Linie),} & \lambda = 430 \text{ (G-Linie).} \end{array}$$

Lithium  $\alpha$  und die G-Linie wurden, weil diese Punkte durchschnittlich als die äussersten Grenzen für noch sichere

Beobachtungen erkannt wurden, als die Endpunkte der Dispersionscurven gewählt.

Eine Einstellung auf Wellenlängen gleichmässigeren Abstandes war deshalb nicht ausführbar, weil bei geradsichtigen Prismen eine genaue Einstellung wegen der immerhin geringen Dispersion Schwierigkeiten hat, weil aber vor allem bei dem benutzten Wernicke'schen Prisma der Brechungsexponent eine Temperaturfunction ist und somit durch Einstellungen mit Mikrometerschraube wenig in Beziehung auf Genauigkeit erreicht werden kann. Bei einer Justirung des Ocularspaltes auf die oben erwähnten scharf markirten Spectrallinien dagegen waren die durch etwaige Temperaturschwankungen bedingten Verschiebungen des gesammten Spectrums stets leicht und schnell zu corrigiren.

Bei den ersten der untersuchten Eisenspiegel wurden noch Ablesungen bei der *E*-Linie gemacht, um eine etwaige Discontinuität der Curven festzustellen; indessen ergab sich, dass dieser Punkt vollständig auf der durch die beiden untersuchten Curvenäste *Li—D* und *F—G* bestimmten Richtung lag, somit wurden weitere Beobachtungen an der *E*-Linie unterlassen.

Es wurden von jedem der drei Metalle sieben Spiegel untersucht, und von den aus dem Uster'schen Bad hergestellten Nickelspiegeln fünf. Ich gebe auch die für diese Legirung gefundenen Werthe, da mir die Thatsache von Interesse zu sein scheint, dass der Charakter der Dispersionscurve sich im wesentlichen nicht von dem für reines Nickel unterscheidet, nur die Maximaldrehung erscheint auf die Hälfte reducirt.

Ausser den bereits erwähnten sieben Eisenspiegeln wurde noch eine Reihe anderer auf ihre Dispersion untersucht, welche sich indessen oxydirten, ehe ihre Dicke gemessen werden konnte. Die Dispersionscurven dieser ca. zwölf hier nicht aufgeführten Spiegel zeigten indessen durchweg denselben Charakter, wie die nachstehend angegebenen, und convergirten bei ihrer sehr verschiedenen Dicke alle ungefähr nach demselben Punkt, d. h. die Drehungen waren auch hier für alle untersuchten Punkte den Dicken proportional.

Es wurde stets die doppelte Drehung bei commutirtem

Strome beobachtet und für jede der untersuchten Stellen des Spectrums mindestens fünf Messungen der Drehungen im Metall gemacht, d. h. 20 Ablesungen, je zwei im Glas und je zwei im Glas + Metall, deren Differenz dann die Drehung im Metall ergab. Ausserdem wurde vor und nach jeder Beobachtungsreihe an jeder Linie die Drehung in der Normal-Glasplatte abgelesen, um die Feldintensität zu controliren; dieselbe blieb jedoch während sämtlicher Versuche constant auf ca. 15000 C.-G.-S.

In den Tabellen enthält die zweite Columnne die Dicke der Metallschicht in  $10^{-7}$  cm. Die nächsten fünf, resp. vier Doppelcolumnnen geben die Drehungen an den fünf, resp. vier Stellen des Spectrums und zwar bedeutet jedesmal:

$q$  die beobachtete doppelte Drehung;

$q_0$  die daraus berechnete einfache Drehung pro 1 cm.

## Eisen.

| Nr. | $D \cdot 10^{-7}$ cm | $\text{Li}_\alpha$ |             | $D$       |             | $E$       |             | $F$       |             | $G$       |             |
|-----|----------------------|--------------------|-------------|-----------|-------------|-----------|-------------|-----------|-------------|-----------|-------------|
|     |                      | $q^\circ$          | $q_0^\circ$ | $q^\circ$ | $q_0^\circ$ | $q^\circ$ | $q_0^\circ$ | $q^\circ$ | $q_0^\circ$ | $q^\circ$ | $q_0^\circ$ |
| 1.  | 28                   | 1,27               | 227 000     | 1,06      | 189 000     | —         | —           | 0,70      | 125 000     | 0,60      | 107 000     |
| 2.  | 34                   | 1,66               | 244 000     | 1,41      | 207 000     | 1,21      | 178 000     | 1,04      | 153 000     | 0,86      | 126 000     |
| 3.  | 51                   | 2,22               | 218 000     | 1,90      | 186 000     | 1,59      | 156 000     | 1,37      | 134 000     | 1,12      | 110 000     |
| 4.  | 61                   | 2,84               | 232 000     | 2,53      | 207 000     | 2,21      | 181 000     | 1,98      | 162 000     | 1,72      | 141 000     |
| 5.  | 63                   | 2,84               | 225 000     | 2,50      | 198 000     | 2,22      | 176 000     | 1,99      | 158 000     | 1,80      | 143 000     |
| 6.  | 73                   | 2,96               | 203 000     | 2,74      | 188 000     | —         | —           | 2,05      | 140 000     | 1,84      | 126 000     |
| 7.  | 82                   | 3,55               | 211 000     | 3,24      | 192 000     | —         | —           | 2,43      | 144 000     | 2,19      | 130 000     |
|     |                      | 223 000            |             | 195 000   |             |           |             | 145 000   |             | 122 000   |             |

## Kobalt.

| Nr. | $D \cdot 10^{-7}$ cm | $\text{Li}_\alpha$ |             | $D$       |             | $F$       |             | $G$       |             |
|-----|----------------------|--------------------|-------------|-----------|-------------|-----------|-------------|-----------|-------------|
|     |                      | $q^\circ$          | $q_0^\circ$ | $q^\circ$ | $q_0^\circ$ | $q^\circ$ | $q_0^\circ$ | $q^\circ$ | $q_0^\circ$ |
| 1.  | 38                   | 1,34               | 176 000     | 1,15      | 152 000     | 1,08      | 142 000     | 1,04      | 137 000     |
| 2.  | 56,5                 | 2,05               | 182 000     | 1,96      | 173 000     | 1,74      | 154 000     | 1,67      | 148 000     |
| 3.  | 69                   | 2,53               | 183 000     | 2,05      | 148 000     | 1,92      | 139 000     | 1,87      | 135 000     |
| 4.  | 77                   | 2,74               | 190 000     | 2,42      | 157 000     | 2,28      | 145 000     | 2,00      | 130 000     |
| 5.  | 94                   | 3,50               | 186 000     | 3,25      | 173 000     | 2,94      | 156 000     | 2,81      | 149 000     |
| 6.  | 95                   | 3,69               | 194 000     | 3,37      | 177 000     | 3,04      | 160 000     | 2,95      | 155 000     |
| 7.  | 99                   | 3,62               | 183 000     | 3,36      | 170 000     | 3,04      | 153 000     | 2,95      | 149 000     |
|     |                      | 185 000            |             | 164 000   |             | 150 000   |             | 143 000   |             |

## Nickel.

| Nr. | $D \cdot 10^{-7} \text{ cm}$ | $\text{Li}_\alpha$ |                   | $D$             |                   | $F$             |                   | $G$             |                   |
|-----|------------------------------|--------------------|-------------------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|
|     |                              | $\varphi^\circ$    | $\varphi_0^\circ$ | $\varphi^\circ$ | $\varphi_0^\circ$ | $\varphi^\circ$ | $\varphi_0^\circ$ | $\varphi^\circ$ | $\varphi_0^\circ$ |
| 1.  | 26,5                         | 0,52               | 98 000            | 0,35            | 66100             | 0,30            | 56600             | 0,26            | 49000             |
| 2.  | 38                           | 0,75               | 98 700            | 0,63            | 82900             | 0,57            | 75000             | 0,51            | 67000             |
| 3.  | 52                           | 0,97               | 93 300            | 0,74            | 71200             | 0,71            | 68300             | 0,58            | 56800             |
| 4.  | 70                           | 1,43               | 102 000           | 1,13            | 80700             | 0,91            | 65000             | 0,83            | 59300             |
| 5.  | 74                           | 1,44               | 97 300            | 1,14            | 77000             | 0,86            | 58100             | 0,92            | 62100             |
| 6.  | 75                           | 1,42               | 94 800            | 1,05            | 70000             | 0,94            | 62700             | 0,75            | 50200             |
| 7.  | 109                          | 1,89               | 93 100            | 1,59            | 78300             | 1,31            | 64400             | 1,09            | 53600             |
|     |                              | 96 300             |                   | 75200           |                   | 64300           |                   | 57000           |                   |

## Nickel (Uster).

| Nr. | $D \cdot 10^{-7} \text{ cm}$ | $\text{Li}_\alpha$ |                   | $D$             |                   | $F$             |                   |
|-----|------------------------------|--------------------|-------------------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|
|     |                              | $\varphi^\circ$    | $\varphi_0^\circ$ | $\varphi^\circ$ | $\varphi_0^\circ$ | $\varphi^\circ$ | $\varphi_0^\circ$ |
| 1.  | 39                           | 0,39               | 50000             | 0,30            | 38500             | 0,24            | 30800             |
| 2.  | 54                           | 0,55               | 50900             | 0,40            | 37000             | 0,32            | 29600             |
| 3.  | 71                           | 0,84               | 59100             | 0,59            | 41500             | 0,55            | 38700             |
| 4.  | 73                           | 0,83               | 56900             | 0,58            | 40400             | 0,52            | 35600             |
| 5.  | 108                          | 1,10               | 50900             | 0,80            | 37000             | 0,74            | 34200             |
|     |                              | 53600              |                   | 38900           |                   | 33600           |                   |

In sämmtlichen Tabellen zeigen bei  $F$  und besonders bei  $G$  die einzelnen Zahlen die stärksten Abweichungen, wie dies bei der starken Absorption und der nicht so grossen Empfindlichkeit des Auges für Helligkeitsnuancen dieser Farben erklärlich ist.

Aus den vorstehenden Resultaten geht zunächst folgender Satz hervor:

*Die Rotationsdispersion in Eisen, Kobalt und Nickel ist anomal.*

Die einzige Stelle, wo ein Widerspruch hiergegen zu finden wäre, liegt bei Nickelspiegel Nr. 5  $G$ -Linie, welche eine stärkere Drehung zeigt, als die  $F$ -Linie desselben Spiegels. Die Zunahme beträgt hier 7 Proc. der Gesamtdrehung. Obwohl diese Abweichung bereits die Grenze der Beobachtungsfehler bedeutend überschreitet, möchte ich doch in Anbetracht der Uebereinstimmung des übrigen Materials auf diese Zahl keinen Werth legen, da der Fehler möglicherweise durch geringe optische Unregelmässigkeiten im Glase bedingt sein kann.

Bei Eisen ist die Rotationsdispersion am stärksten, geringer bei Nickel, noch kleiner im Verhältniss zur Drehung bei Kobalt. Diese Curve schneidet die des Eisens ungefähr bei der Wellenlänge  $\lambda = 500$ , d. h. an diesem Punkte des Spectrums zeigen gleich dicke Schichten der beiden Metalle gleich grosse Drehung.

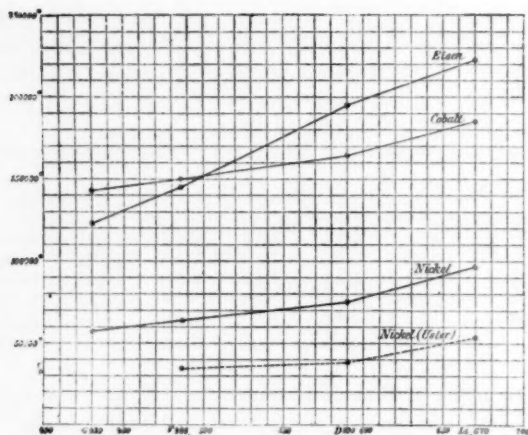


Fig. 2.

Wie bereits erwähnt, zeigen auch die aus dem Uster'schen Bade niedergeschlagenen Spiegel eine Dispersion, die derjenigen der reinen Spiegel ganz analog ist, nämlich ein starkes Abfallen von  $\text{Li}_\alpha$  nach  $D$ , aber von da ab bis zum Violett einen horizontaleren Verlauf. Denselben, wenn auch schwächeren Knick bei  $D$  zeigt die Kobaltcurve, während die Eisencurve einen fast geradlinigen Verlauf nimmt.

Was die absolute Maximaldrehung pro 1 cm betrifft, so stimmen hier meine Werthe mit denen von Kundt und du Bois<sup>1)</sup> gefundenen für die betreffenden Wellenlängen im ganzen gut überein; ich stelle sie hier zum Vergleich nebeneinander.

1) du Bois, Wied. Ann. **31**. p. 960. 1887.

|         |         |                        |        |                        |
|---------|---------|------------------------|--------|------------------------|
| Eisen:  | Kundt   | $\varphi_0 = 209\,000$ | Lobach | $\varphi_0 = 216\,000$ |
| Kobalt: | du Bois | $\varphi_0 = 198\,000$ | "      | $\varphi_0 = 180\,000$ |
| Nickel: | "       | $\varphi_0 = 89\,000$  | "      | $\varphi_0 = 90\,000$  |

Die beste Uebereinstimmung zeigt Nickel, nämlich bis auf 1 Proc., dann Eisen auf ca.  $3\frac{1}{2}$  Proc., wogegen Kobalt allerdings eine Abweichung von etwa 9 Proc. von dem du Bois'schen Werthe aufweist. Ich möchte, da mein Resultat hier hinter dem du Bois'schen zurückbleibt, dies theilweise auf die vielleicht nicht völlige Reinheit des von mir verwendeten Materials schieben, da die käuflichen Kobaltsalze doch nie ganz frei von Nickel zu sein pflegen, andererseits aber ist, wie bereits oben bemerkt, der Fehler zum Theil Folge der weniger genauen Bestimmung der Absorptionsconstanten des Kobalt.

Da die Kundt'schen und die du Bois'schen Dicken der Schichten mit Hülfe der Wage, die meinigen dagegen auf optischem Wege ermittelt sind, so zeigt die Uebereinstimmung der beiderseitigen Resultate, dass die untersuchten Metalle auch in diesen geringen Dicken bereits vollkommen normale Dichtigkeit besitzen, eine Thatsache, die in letzter Zeit mehrfach bestritten worden ist.

Wie Hr. Prof. Kundt<sup>1)</sup> in seiner Arbeit über die Brechungsexponenten der Metalle nachgewiesen hat, zeigen Eisen und Nickel anomale Dispersion. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit legen es daher nahe, einen Zusammenhang zwischen den Brechungsexponenten und der Maximaldrehung für die verschiedenen Farben zu vermuthen. Herr Voigt<sup>2)</sup> hat bereits auf einen solchen Zusammenhang hingewiesen und auf Grund theoretischer Erwägungen die folgende Beziehung zwischen den Brechungsexponenten und dem Drehungsvermögen für natürlich und künstlich active Substanzen aufgestellt:

$$q_a = n^2 \left( \frac{Q}{\lambda^3} - \frac{Q_1}{\lambda^4} \right),$$

worin  $q_a$  die Drehung,  $n$  den Brechungsexponenten,  $\lambda$  die Wellenlänge und  $Q$  und  $Q_1$  Constante bedeuten.

1) Kundt, Wied. Ann. 34. p. 469. 1888.

2) Voigt, Wied. Ann. 23. p. 493. 1884.



Eine Berechnung dieser Constanten für die verschiedenen Metalle führt indessen zu keiner Beziehung zwischen den drei anderen Grössen, und so bestätigt sich daher wohl, was von vorn herein zu vermuthen war, dass die electro-magnetische Drehung eines Körpers nicht einzig durch seine optischen Eigenschaften gegeben ist, und dass hierbei auch seine magnetischen Eigenschaften vorwiegenden Einfluss ausüben.

Indessen erscheint dem Verfasser das vorhandene Material noch nicht ausreichend, um eine gesetzmässige Beziehung der in Frage kommenden Grössen aufzustellen, zumal die Brechungsexponenten des Kobalt bisher noch keiner experimentellen Untersuchung unterzogen sind.

Phys. Inst. der Univ. Berlin, Juli 1889.

V.

For  
We  
langnac  
Ar  
ein  
gensuc  
wel  
Je  
gekdie  
Län  
auf  
fläc  
suc  
fluc  
dün  
sat  
die  
lad  
ges15  
403

## V. Neue Beobachtungen an gleitenden Funken; von F. von Lepel.

Seit den Versuchen von Abria<sup>1)</sup> haben sich mehrere Forscher<sup>2)</sup> mit den Entladungen beschäftigt, welche ihren Weg an einer mehr oder weniger gut leitenden Fläche entlang nehmen.

Jene ausgezeichnete Methode, die fixirte Funkenbahn nach der Entladung zu studiren, veranlasste mich bei einer Arbeit über die Röhrenfunken,<sup>3)</sup> diesen Erscheinungen noch einmal näher zu treten und führte zu einigen Beobachtungen, die meines Wissens noch nicht publicirt sind.

Bei den nachfolgenden, in aller Kürze erwähnten Versuchen kommt es hauptsächlich auf den Widerstand an, welchen der Entladungsfunken auf der „Gleitbahn“ findet. Je geringer jener, desto länger der Funke — und umgekehrt.

### A. Lange Funken.

I. in feuchten Röhren. Nach Spiess (l. c.) können die auf Wasser gleitenden Funken eine ausserordentliche Länge erreichen, worauf übrigens bereits Zimmermann<sup>4)</sup> aufmerksam gemacht hat. Noch günstiger als eine Wasserfläche ist aber eine feuchte Röhre. Gelegentlich eines Versuchs mit sehr hoher Spannung bemerkte ich an einer Influenzmaschine, dass der electriche Ausgleich der durch dünnwandige Wasserröhren verbundenen äusseren Condensatorbelegungen als heller 25 cm langer Funke aussen an dieser Röhre erfolgte. Demgemäss legte ich in die Entladungsröhren dünnwandige mit Schwefelsäure gefüllte und zugeschmolzene Capillarröhren und erhielt nun ungewöhnlich

1) Abria, Ann. de chim. et de phys. 74. p. 186. 1840.

2) Paalzow, Pogg. Ann. 127. p. 137. 1866; Antolik, Pogg. Ann. 151. p. 127. 1874, 154. p. 14. 1875; Peters, Pogg. Ann. 156. p. 397 u. 403. 1875; Spiess, Wied. Ann. 31. p. 975. 1887.

3) F. v. Lepel, Meteorolog. Ztschr. 1889. Juniheft.

4) Zimmermann, Handbuch der Physik p. 122. 1854.

lange Funken. Wurde die 15 mm weite Entladungsröhre aber ausserdem noch mit einer Drahtspirale umwickelt, so erreichten die Funken eine Länge von etwa 60 cm.

Diese sonst noch nicht beschriebene Erscheinung dürfte aus dem verminderten Widerstand erklärt werden, welchen die beiden Electricitäten auf der Gesamtstrecke zwischen den Polen finden.<sup>1)</sup> Lässt man die Capillarröhre fort, so nimmt der Funke seinen Weg gegenüber der Spirale im Innern der Röhre. Und gibt man der Capillarröhre unter Fortfall der äusseren Spirale ebenfalls eine beliebige gebogene Form, so dient diese dem Funken jedesmal als Unterlage.

Ändert man diese Versuchsbedingungen dahin, dass jene Capillarröhre in etwa 1 mm Abstand von einer berussten Papierfläche den Funkenübergang vermittelt, so erhält man sehr lange Entladungen, die ihren Weg zeichnen. Man beobachtet eine Anhäufung der Kohle unter der Gleitröhre — eine Folge der electrischen Anziehung. Bei grösserem Abstände sammelt sich die Kohle erst nach mehreren Entladungen an; aber stets ist das Resultat ein dunkler Strich — gleichsam ein Negativ der von Antolik nach der „Bedeckungsmethode“ hergestellten Bilder. Die Aehnlichkeit dieser schwarzen Linie mit der Mittellinie der Antolik'schen Bilder fällt sofort in die Augen und lässt vermuthen, dass auch diese Mittellinie durch Anziehung der Kohle entsteht.

II. auf metallhaltigen Unterlagen. Bei den bisherigen Versuchen trennte eine isolirende Glaswand den Funken von dem guten Leiter, der Säure oder der Metallspirale. Nun erfolge die Entladung in nächster Nähe über einer metallhaltigen Unterlage.

Zunächst wurde auf eine Glasplatte eine dünne Gela-  
tineschicht gegossen und diese mit Broncepulver bestreut. Geringe Mengen desselben liefern dann nur eine, grössere dagegen mehrere Funkenbahnen. Und wenn man die Dichte des Broncepulvers noch vermehrt, so bemerkt man zahllose feine leuchtende Massen, die von den Electroden aus- und

1) Vgl. G. Wiedemann, Lehrb. der Electr. IV. p. 505.

ineinander übergehen. Auch diese Erscheinung ist durch die Anziehung der Broncetheilchen leicht zu erklären. Die Theilungen erfolgen durch die gegenseitige Abstossung der gleichnamigen electrisch gewordenen Partikelchen.

Auf berussten Streifen von Gold- oder Silberpapier von etwa 2 cm Breite hinterliess eine einzelne Entladung zwar die bekannten Querlinien in der Kohle,<sup>1)</sup> aber bei breiten Streifen bemerkt man ebenso wie bei der dichteren Gelatine-Bronceschicht Längsstreifen, die sich strahlenförmig zwischen den Aufspringepunkten vereinigen. Diese Längsstreifen scheint man bisher nicht beobachtet zu haben, vielleicht war das Papier nicht breit genug, oder die Entladung zu schwach.

Lässt man nun über diese metallhaltigen Papierstreifen nicht einen, sondern viele Funken hinter einander hinweggleiten, so erhält man Verzweigungen von seltener Länge und Mannigfaltigkeit. Anfangs nimmt man eine Abnahme der vielen leuchtenden Querstreifen wahr, bis sie zuletzt ganz verschwinden, um Längsstreifen Platz zu machen. Auch diese, zuerst sehr zahlreich, verschwinden, und nun vermitteln nur einige sehr helle Haupt- und mehrere Nebenbahnen — freilich nie genau an derselben Stelle — dauernd den Electricitätsausgleich.<sup>2)</sup>

Durch die starken häufigen Entladungen hat sich der Funke allmählich besser leitende Bahnen gebildet, als ihm ursprünglich durch die lose verbundenen Metallmassen geboten waren. Umlagerungen (man beachte die Staubwolken nach den ersten Entladungen), Schmelzungen (Farbe der Funken) müssen stattfinden und dadurch das ganze Gefüge der leitenden Schicht umgeformt werden.

Daher treten auf derartigen Unterlagen nie wieder Streifen, sondern nur Funkenzweige auf. Man wählt, je nach dem Grade der Umformung, den man ev. zu fixiren wünscht, irgend einen bereits exponirten Papierstreifen und berusst ihn vorsichtig. Der nächste Funke, also eine einzige Entladung, welche man jetzt darüber hingleiten lässt, fixirt einen

1) cf. Quet u. Seguin, *Compt. rend.* 48. p. 338. 1859.

2) Vgl. auch G. Wiedemann, *Lehrb. der Electr.* 4. p. 725.

vieler verzweigten Weg, und liefert so ein Bild, welches an Schärfe und Schönheit der Details keinem aller bekannten Funkenbilder nachsteht.<sup>1)</sup> Dass die „verzögerten“ Funken mit ihrer geringeren Electricitätsmenge zugleich auch weniger scharfe Bilder liefern, sei nur beiläufig erwähnt.

#### B. Kurze Funken.

Wenn man den Entladungswiderstand in der Gleitbahn durch Entfernung aller Metalltheile erhöht und nur die Kohlschicht benutzt, so erhält man die bekannten, von Antolik, Peters u. a. m. beschriebenen Bilder.

I. Unterbrochene Funkenstrecken. Den Widerstand kann man noch weiter vermehren, wenn der Russ stellenweise fortgewischt oder sonstwie russfreie Strecken hergestellt sind, welche die Leitung unterbrechen. Verzögerte Funken von geringer Spannung überspringen mehrere derartige Unterbrechungsstellen in verschiedenen Bahnen. Immer an ihrer + Seite bemerkt man an diesen Strecken kleine blaue Flämmchen, die an der — Seite in gelblich leuchtenden Punkten endigen und die Kohle dort corrodiren. Die Unterbrechungstreifen haben also an der + Seite einen glatten, an der — Seite einen zackigen Rand, — gleichgültig, welche Form oder Ausdehnung sie besitzen. Der Versuch zeigt unzweifelhaft, dass die ganze Unterlage von der Electricität durchströmt wird. Helle, weisse Funken gehen gleichfalls über mehrere Unterbrechungsstellen hinweg. Die schwarze Mittellinie reicht beiderseits scharf an dieselben heran. Aber dort selbst ist keine Spur von Kohle zu erkennen, während sie doch sonst eingebrannt und nicht wieder zu entfernen ist.<sup>2)</sup> Die Kohlentheilchen werden demnach hier nicht in der „Funkenrichtung“ oder einer dazu schrägen, sondern nur in senkrechter Richtung fortgeschleudert (Resultat: die Strahlen), oder sie bleiben an der Stelle, wohin sie durch Anziehung zusammengeschoben sind (Resultat: die Mittellinie).

1) Vgl. darüber auch v. Lepel, Verzweigte Blitzbahnen. Deutsche Meteorolog. Ztschr. 1890. Märzheft.

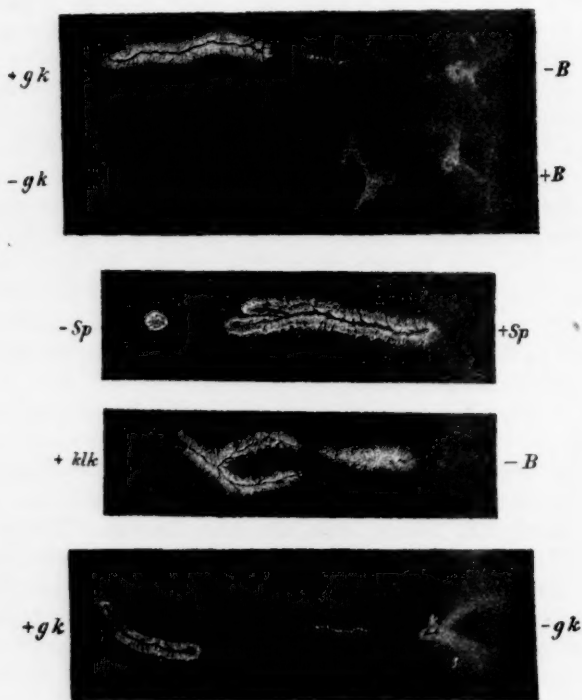
2) cf. Antolik, l. c. p. 151.

Diese unterbrochenen Funkenbahnen können daher nur so entstanden sein, dass sie nicht nur in der Papier-ebene, sondern auch aus dieser wellenförmig heraustretend ihren Weg nehmen. Alle hier vorliegenden disruptiven Entladungen müssen nach Feddersen einen oscillatorischen Charakter haben. Es ist interessant, zu bemerken, dass keine einzige Partialentladung ihren Weg mit Kohle auf der Unterbrechungsstelle zeichnet.

II. Verkürzte Funkenbahnen und verschiedene Electroden. — Der electrische Funke verlässt also die Ebene seiner leitenden Unterlage. Dies wichtige Ergebniss ist auch bei ganz kurzen Funken von hoher Spannung zu erhalten. Schon die erste Entladung durchbohrt oder zerreisst oft das Papier. Spiess hat (l. c.) auf ganz bestimmte Seitenentladungen hingewiesen, welche auf einer mit *Lycopodium* bestreuten Wasserfläche den Abria'schen Linien entsprechen. Nicht ebenso schön, aber dauerhafter erhält man in dem zerrissenen Papier ganz ähnliche Figuren, die augenscheinlich dadurch entstehen, dass die Entladung nicht auf, sondern in dem Papiere ihren Weg nimmt, ihre ursprüngliche Bahn also verlässt. Sie charakterisiren sich als ausserordentlich lange Zweiglinien meist an den Krümmungen, näher an der — Seite der Bahn, endigen kelchartig und stehen sich bisweilen gegenüber.

Es lag nahe, auch die Form der Electroden zu verändern. Statt der bisher verwendeten kleinen Kugeln von 4 mm Durchmesser benutzte ich scharfe Spitzen, Schneiden, Drahtbüschel und grössere Kugeln in allen möglichen Combinationen. Dabei stellte sich heraus, dass alle scharfkantigen Electroden den Charakter des Funkenbildes ändern, wenn der Entladungsweg ein kurzer und die Spannung eine recht grosse ist. Man bemerkt dann Folgendes: die schwarze Mittellinie ist nicht mehr gleichförmig breit und dunkel, zusammenhängend und von beiden Polen in die Strahlschicht auslaufend, sondern sehr fein, oft zackig, stellenweise knotenförmig verdickt, bisweilen unterbrochen. Durchbohrungen oder Zerreiassungen des Papiers, Theilungen der Mittellinie in der Strahlschicht, Verästelungen, lang ausgedehnte Abria'sche Linien, unregelmässige, oft weit von den Electroden entfernte Aufspringe-

stellen von sichelartiger Form — die concave Seite der — Electrode zugekehrt, — wurden häufig, ein polarer Unterschied aber nur in Bezug auf die Durchbruchstellen wahrgenommen. Diese lagen stets näher der negativen Seite. Regelmässig war die anderswo noch nicht beobachtete *Knotenbildung in der feinen schwarzen Mittellinie*. Bisweilen ging die Entladung nur als feiner weisser Strich dort am Papier entlang, wo bei Verwendung kleiner Kugeln die Strahlschicht gelegen haben würde; — oder sie spaltete sich in der Nähe des positiven Poles und geht in zwei Aesten bis zum anderen.



Solche Funkenbildungen erläutern die oscillatorischen Partialentladungen. Die Spaltungen erklären sich ohne weiteres als deren Folge. Im übrigen divergiren die Electricitäten bekanntlich von einer Spitze oder einem Drahtbüschel.



Ein Zweig nimmt seine Ausgleichung auf der Unterlage und indem andere folgen, entstehen Stellen, wo mehr Electricität sich ausgleicht, wo der Funke mit grösserer Energie, als anderswo, auf die Unterlage „aufprallt“. Dorthin wird durch Anziehung der Kohletheilchen mehr Russ zusammengeschoben, als anderswohin. Die Kohle wird zum Theil als „Leitungsmaterial“ eingebrannt, zum Theil aber, gleichnamig electrisch geworden, wieder abgestossen. Dadurch entstehen jene eigenthümlichen Knotenbildungen und Ausstrahlungen.

### Allgemeines.

Auf berusstem Papier ist das Funkenbild in der „Strahlschicht“, der Vereinigungsstrecke beider Electricitäten, am breitesten. Dort ist am meisten Kohle fortgeschleudert, die electrische Kraft muss dort am grössten sein. Durchbohrungen und Zerreissungen des Papiers findet man nur in der Strahlschicht. Auf metallhaltiger Unterlage lehren die Versuche, dass die ganze Funkenbahn eine Strahlschicht bilden kann. Denn die feinen Linien der Antolik'schen Russbilder verlängern sich hier zu deutlichen Streifen, mag das benutzte Silber- oder Goldpapier berusst sein oder nicht.

Seitliche Ausstrahlungen, die über eine metallhaltige Unterlage hinausgehen, sind wiederholt beschrieben.<sup>1)</sup> Ich möchte aber auch diejenigen hierher rechnen, welche Van Marum an einem dünnen, stark electrisch geladenen Draht beobachtet hat.<sup>2)</sup> Je schmaler und dünner diese Metallbahnen, desto grösser, je breiter, desto kleiner sind ceteris paribus, die seitlichen Ausstrahlungen. Es sind Seitenentladungen, die infolge der mehrfach betonten Wellenbewegung des Funkens in der Ebene des Papiers und auch in anderen auftreten können. War die Wellenbewegung senkrecht zur Papierfläche, so werden sich zwei Ausstrahlungen zu beiden Seiten der Funkenbahn gegenüber liegen; erfolgte sie unter anderem Winkel oder in der Papierebene, so liegt die Ausstrahlung nur an der einen und zwar der concaven Seite.

1) Vgl. Antolik u. Peters, l. c. u. G. Wiedemann, Lehrb. d. Electr. l. c. p. 739.

2) Müller u. Pouillet, Lehrb. d. Phys. 3. p. 284. 1888.

Denn gerade dort findet der Funke den grössten Widerstand gegen eine gerade Wegrichtung.<sup>1)</sup>

Nach E. Mach und Wosyka<sup>2)</sup> hat man die Antolik'schen Russfiguren auf Luft-, speciell Schallbewegungen zurückzuführen. Das mag dahingestellt bleiben. Jedenfalls leuchten die Ausstrahlungen. Sie sind vorhanden, auch wenn keine berusste, sondern eine anderweitig geschwärzte Papierfläche als Gleitbahn gewählt wird. Die photographische Platte fixirt sie, obwohl das schwarze Papier sie nicht erkennen lässt.

Nochmals auf die polaren Unterschiede der Funkenbilder hinzuweisen, würde hier zu weit führen.<sup>3)</sup> Es sei nur hervorgehoben, dass die vorliegenden Versuche die bekannte Thatsache erläutern: die Funkenbahn ist nicht die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Polen, sondern der Weg mit dem geringsten Widerstande.

Wieck b. Gützkow, Neuvorpommern, im October 1889.

---

1) Vgl. den Ausdruck von Spiess: „Hauptexplosionscentra“ l. c. p. 979.

2) E. Mach u. Wosyka, Pogg. Ann. 156. p. 407. 1875.

3) Vgl. darüber G. Wiedemann, Lehre von der Electr. l. c. p. 468 u. Peters, l. c. p. 397.

## VI. Die galvanische Kette; von W. G. Hankel.

(Aus den Berichten der k. sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Cl., vom 14. Nov. 1889; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

### Electromotorische Kraft.

Die materiellen Molecüle der Körper befinden sich fortwährend in einem electrischen Zustande, der durch ihre Constitution bedingt ist und sich sofort wieder herstellt, wenn er durch den Eingriff äusserer Einwirkungen beeinflusst worden war. Betrachten wir die electrischen Vorgänge als rotirende Bewegung, so liegen auf der Oberfläche der Molecüle rotirende Schwingungen, deren Axen normal zur Oberfläche sind; dieselben können je nach der Gestalt und der Zusammensetzung der Molecüle auf der ganzen Oberfläche gleiche Stärke und gleichen Sinn besitzen, oder auf den verschiedenen Theilen der Oberfläche verschieden sein. Der Einfachheit wegen sollen im Folgenden die Schwingungen überall auf der ganzen Oberfläche als gleich gross und von gleichem Sinne angenommen werden.

Wird durch Zusammenhäufung von Molecülen derselben Art ein Körper von endlichen Dimensionen gebildet, so werden auf jedem im Inneren liegenden Molecüle die rotirenden Bewegungen durch die umliegenden Molecüle gehemmt, weil an den Berührungsstellen die Rotationen auf den beiden Molecülen entgegengesetzte Richtung und gleiche Grösse besitzen. Es bleiben nur die an der äusseren Grenzfläche des Körpers befindlichen Schwingungen übrig. Sobald aber nun der Körper mit der Erde in leitende Verbindung gebracht wird, überträgt sich auf die Oberfläche eine Schicht entgegengesetzter Electricität und der Körper erscheint un-electrisch.

Legt man auf einen solchen nicht electrischen Leiter, z. B. auf eine Kugel aus Zink, eine Scheibe eines vollkommenen Isolators, so wird dadurch der Zustand der Zinkkugel nicht wesentlich verändert, denn die durch die Ableitung zur

Erde angehäuften electrischen Schicht verhält sich gegen den Isolator wie zuvor gegen die Luft.

Anders gestaltet sich der Vorgang, wenn eine durch Ableitung unelectrisch gemachte und darauf wieder isolirte Zinkkugel mit einer zweiten ebensolchen berührt wird. Die in den zur Berührung kommenden Punkten befindliche, den unelectrischen Zustand bedingende Schicht wird durch die Berührung der leitenden Massen verdrängt, und es treten die Rotationen der beiden sich berührenden Molecüle einander gegenüber. Diese Rotationen sind aber gleich gross und von entgegengesetzter Richtung, heben sich also auf und der Berührungspunkt verhält sich wie ein innerer Punkt der übrigen Masse. Das System beider Kugeln bleibt also unelectrisch.

Wenn jedoch die beiden zur Berührung kommenden Kugeln aus Substanzen bestehen, deren Molecüle verschieden starke und auch wohl in entgegengesetzter Richtung erfolgende Schwingungen haben, so heben sich an der Berührungsstelle die Rotationen der beiden aneinanderstossenden Molecüle nicht auf; es entsteht vielmehr daselbst in der Berührungsebene eine Rotation, deren Grösse gleich ist der Differenz der Rotationsgeschwindigkeiten beider Molecüle. Die Rotationsrichtung auf jedem Molecüle ist dabei auf die auf seiner Oberfläche nach aussen gerichtete Normale bezogen. Sind die Schwingungen auf dem einen Molecüle positiv, auf dem anderen negativ, so haben sie in der Berührungsebene gleiche Drehungsrichtungen und addiren sich. Geschehen auf den beiden Molecülen die Rotationen in derselben Richtung, aber mit verschiedener Geschwindigkeit, so resultirt nur eine dem Ueberschuss der grösseren über die geringere entsprechende Rotation.

Diese in der Berührungsebene auftretenden Rotationen verbreiten sich über die beiden sich berührenden Molecüle und es entsteht auf der einen Seite jener Ebene ein positives und auf der anderen ein negatives Molecül.

Wie nun ein electrisch geladener Körper auf einen in der Nähe befindlichen Leiter<sup>1)</sup> derart einwirkt, dass im Inneren

1) Die Vorgänge bei der Vertheilung in Leitern werde ich in einer späteren Mittheilung genauer behandeln.

des letzteren die Molecüle in rotirende Bewegungen um die von dem Körper ausgehenden Strahlen als Axen versetzt werden, ebenso übertragen sich die Rotationsbewegungen der sich berührenden Molecüle der beiden Kugeln auf das Innere der ihnen angehörigen Massen. An der Grenzfläche gegen den Nichtleiter treten sie dann als freie Electricität auf.

Die durch die Berührung erzeugte electromotorische Kraft erscheint also als eine Rotationsbewegung von bestimmter Grösse.

Zu einer gleichen Auffassung der electromotorischen Kraft kommen wir bei Betrachtung der Inductionsvorgänge. Ein in einen Leiterkreis eintretender Strom erregt in dem benachbarten Stücke eines zweiten Leiterkreises einen inducirten Strom. Die Einwirkung des entstehenden Stromes auf den benachbarten Leitertheil besteht in Erregung von Rotationsbewegungen, welche dann für die entfernteren Theile des zweiten Kreises die electromotorische Kraft darstellen.

#### Electrischer Strom.

Werden die Pole eines galvanischen Elementes durch einen Leiter verbunden, so sucht die electromotorische Kraft  $e$  in den Molecülen desselben rotirende Bewegungen zu erzeugen. Diesem Bestreben stellen die einzelnen Molecüle einen von ihrer Beschaffenheit abhängigen Widerstand entgegen: die vorhandene electromotorische Kraft wird nun zum Theil verbraucht, um diesen Widerstand zu überwinden, und blos der noch übrige Theil bleibt als Rotation erhalten, welche in ihren Wirkungen nach aussen den electrodynamischen Effect hervorbringt. Je grösser der Widerstand ist, welchen die Substanz der Bewegung ihrer Molecüle entgegensetzt, um so mehr wird die electromotorische Kraft zu seiner Ueberwindung in Anspruch genommen, und um so geringer fällt die Geschwindigkeit der Rotation, d. h. die Stärke des Stromes aus. Die Summe der Rotationsgeschwindigkeiten ist in allen Querschnitten des Drahtes dieselbe, wenn der Strom constant geworden ist.

Die Verhältnisse bei der Strombildung zeigen eine gewisse Analogie mit dem Fliessen des Wassers durch Röhren. Ist in einem Gefässe eine Druckhöhe  $H$  gegeben, und fliesst

die Flüssigkeit durch eine am Boden desselben befindliche horizontale cylindrische Röhre aus, so wird ein Theil  $h$  der Druckhöhe verbraucht, um den entgegengesetzten Widerstand zu überwinden, und nur der Rest  $h'$  erscheint als eine in allen Querschnitten der Röhre gleich grosse Geschwindigkeit.

#### Stärke des electrischen Stromes.

Es sei ein einziges<sup>1)</sup> galvanisches Element von der electromotorischen Kraft  $e$  gegeben, die wir uns in einem Querschnitte, z. B. in demjenigen, in welchem die beiden verschiedenen Metalle sich berühren, vereinigt denken wollen. Wird nun diese Kette durch einen Leiter vom Widerstande  $U$  geschlossen, so erhält man den in ihr entstehenden Strom  $i = e - U$ ; d. h. es wird von der electromotorischen Kraft  $e$  unter den gegebenen Umständen ein Theil  $U$  absorbirt oder zur Ueberwindung des Widerstandes im Schliessungskreise verwendet, sodass nur der Rest  $e - U$  als Strom auftritt.  $e$  und  $U$  müssen dabei mit demselben Maasse gemessen sein; in eben demselben Maasse erhält man dann auch die Stromstärke  $i$  ausgedrückt.

Bei dem bisherigen Verfahren zur Bestimmung der electromotorischen Kraft und des sogenannten Widerstandes werden dieselben in verschiedenen Maassen gefunden, und es kann daher aus solchen Angaben der Werth von  $i$  nach der obigen Formel nicht erhalten werden. Weiterhin werde ich ein Verfahren angeben, und seine Richtigkeit durch das Experiment beweisen, bei welchem  $e$  und  $U$  in gleichen Einheiten gemessen sind, sodass also  $i = e - U$  ist. Aus dieser Gleichung folgt

$$e - i = U.$$

Die Erfahrung hat nun gelehrt, dass bei unverändert erhaltenem Leiterkreise die Stromstärke proportional mit der electromotorischen Kraft wächst. Wird die electromotorische Kraft  $e$  auf  $E$  erhöht, so steigt die Stromstärke  $i$  auf  $I$ , wobei  $e:i = E:I$ , d. h. bei unverändertem Leiterkreise bleibt das Verhältniss der electromotorischen Kraft zur Stromstärke  $e/i = E/I$  unverändert.

1) Die Vorgänge bei mehreren Elementen werden in einem späteren Abschnitte behandelt.

Schreiben wir die Gleichung  $e - i = U$  in der Form  $(e/i - 1)i = U$ , so behält der in der Klammer stehende Ausdruck  $e/i - 1$  für denselben Leiterkreis unverändert denselben Werth. Daraus folgt, dass der Widerstand oder der durch ihn absorbirte Betrag an Rotationsbewegung für denselben Leiterkreis keine Constante ist, sondern sich proportional mit der Stromstärke ändert.

Bezeichnen wir den durch einen gegebenen Leiterkreis bei der Stromstärke 1 absorbirten Betrag der electromotorischen Kraft mit  $u$ , also  $u = U/i$ , so wird  $U = ui$ . Durch Einführung dieses Werthes erhält man  $(e/i - 1)i = ui$ , oder

$$\frac{e}{i} = u + 1.$$

In dieser Gleichung bedeutet also  $e/i$  den Zahlenwerth der electromotorischen Kraft, welche nöthig ist, um in dem gegebenen Leiterkreise die Einheit des Stromes zu erzeugen.

Die oben mit  $u$  bezeichnete Zahl will ich kurzweg die *Absorptionszahl* des gegebenen Leiters nennen; sie gibt also den Betrag an, welcher bei der Stromstärke 1 von der zur Erzeugung dieses Stromes in dem gegebenen Leiterkreise nöthigen electromotorischen Kraft absorbirt wird. Diese electromotorische Kraft selbst ist aber  $= u + 1$ , also um die Einheit grösser als  $u$ . Es dürfte zweckmässig sein, auf einen speciellen Fall einzugehen.

Ist wie z. B. in einer später angeführten Messung für den aus einem grossen Daniell'schen Elemente und einer Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt gebildeten Leiterkreis die Absorptionszahl 6,99, so heisst dies: Von einer electromotorischen Kraft im Betrage von  $6,99 + 1 = 7,99$  werden durch den genannten Leiterkreis 6,99 Theile absorbirt und nur 1 Theil bleibt als Strom erhalten.<sup>1)</sup>

1) Im Vorstehenden ist die Absorptionszahl  $u$  so bestimmt, dass sie angibt, wieviel von einer durch  $u + 1$  dargestellten electromotorischen Kraft absorbirt wird. Sie ist also stets auf die Einheit der Stromstärke bezogen.

Man kann die Absorption aber auch als den Bruchtheil darstellen, welcher von der electromotorischen Kraft 1 absorbirt wird. Dividirt man die obige Gleichung durch 7,99, so erhält man:



Änderungen der Stromstärke infolge von Änderungen im Leiterkreise.

Es sei gegeben eine galvanische Kette von der electromotorischen Kraft  $e$  und der Absorptionszahl  $u$ ; dann ist

$$e = ui + i \quad \text{und} \quad i = \frac{e}{u + 1}.$$

Schaltet man in diese Kette einen Draht von der bekannten Absorptionszahl  $a$  ein, so erhält man, wenn  $i'$  die neue Stromstärke bedeutet:

$$e = ui' + ai' + i' \quad \text{und} \quad i' = \frac{e}{u + a + 1}$$

oder

$$i' = \frac{e}{(u + 1) + a}.$$

Ist die Absorptionszahl  $u$  der ursprünglichen Kette, so wie deren electromotorische Kraft  $e$  unbekannt, so lassen sich die beiden unbekannten Grössen  $e$  und  $u$  aus den beobachteten Werthen von  $i$  und  $i'$ , sowie der bekannten Absorptionszahl  $a$  des eingeschalteten Leiters berechnen. Aus den beiden Gleichungen

$$i = \frac{e}{u + 1} \quad \text{und} \quad i' = \frac{e}{(u + 1) + a}$$

folgt

$$e = \frac{ii' a}{i - i'} \quad \text{und} \quad u + 1 = \frac{ai'}{i - i'}.$$

$$u = \frac{i' a}{i - i'} - 1.$$

Ist ein Draht von der unbekannten Absorptionszahl  $u'$

$$1 = \frac{6,99}{7,99} + \frac{1}{7,99} = 0,874 + 0,126.$$

Nach dieser Bestimmung wird also der Absorptionscoefficient

$$v = \frac{u}{u + 1} = 0,874.$$

Ist der Absorptionscoefficient in dieser Weise angegeben, so erhält man, weil die electromotorische Kraft = 1 ist, die Stromstärke gleich der Differenz zwischen dieser electromotorischen Kraft und dem Absorptionscoefficienten. Im vorliegenden Falle erhalten wir also die Stromstärke = 0,126. Von der electromotorischen Kraft 1 ist also 0,874 durch den Widerstand absorbirt worden, und nur 0,126 Theile erscheinen im Strom.

Die eine Angabe für die Absorption lässt sich leicht in die andere verwandeln. Ist dieselbe auf die Einheit der electromotorischen Kraft bezogen, also  $1 = 0,874 + 0,126$ , so hat man nur die Gleichung mit 1/0,126 zu multipliciren, um die Stromstärke auf 1 zu erhöhen und erhält dann die frühere Absorptionszahl  $u = v/(1 - v) = 0,874/0,126 = 6,99$ .

gegeben, und soll  $u'$  nach dem Maasse von  $a$  bestimmt werden, so schaltet man den Draht anstatt  $a$  in die zuvor benutzte Kette ein und erhält die Stromstärke  $i''$ . Es ist dann

$$e = ui'' + u'i'' + i''.$$

Aus dieser Gleichung und der ersten  $e = ui + i$  erhält man analog wie zuvor

$$i'' = \frac{e}{(u+1) + u}.$$

Aus den drei Gleichungen

$$i = \frac{e}{u+1}, \quad i' = \frac{e}{(u+1) + a} \quad \text{und} \quad i'' = \frac{e}{(u+1) + u}$$

ergibt sich das Verhältniss

$$\frac{u'}{a} = \frac{i'(i-i'')}{i''(i-i')}.$$

Soll die Stärke eines Stromes  $i = e/(u+1)$  durch Hinzufügung eines neuen Widerstandes auf die Hälfte vermindert werden, so genügt es nicht, einen Draht von der Absorptionszahl  $u$  hinzuzusetzen. Es würde dann ein Strom von der Stärke  $y$  entstehen, welcher grösser wäre als  $\frac{1}{2}i$ , denn man hätte  $e = 2uy + y$  oder  $y = e/(2u+1)$ ; eine Verminderung des Stromes auf die Hälfte kann erst eintreten, wenn der Nenner des Bruches  $2u+2 = 2(u+1)$  wird. Um den Strom auf die Hälfte zu reduciren, ist also in die ursprüngliche Kette ein Leiter von der Absorptionszahl  $u+1$  einzuschalten.

Der Grund, warum die Hinzufügung von  $u$  allein nicht genügt, ist leicht zu erkennen. Eine Vermehrung des Leiters  $u$  um  $u$  würde bei der Stromstärke  $i/2$  denselben Betrag von  $e$  in Anspruch nehmen, als der Widerstand  $u$  bei der Stromstärke  $i$ . Nun muss aber auch der im Strome  $i$  vorhandene Betrag auf die Hälfte reducirt werden; mithin ist noch ein weiterer Widerstand einzuschalten. Es bedarf also der Hinzufügung eines Leiters von der Absorptionszahl  $u+1$ , um die Stromstärke auf die Hälfte zu reduciren.

Aehnlich verhält es sich, wenn durch Hinwegnahme von Widerstand die Stärke des Stromes verdoppelt werden soll. Es ist dann nicht blos ein Widerstand  $u/2$  wegzunehmen, sondern  $(u+1)/2$ . Nähme man nur einen Leiter von der Ab-

sorptionszahl  $u/2$  hinweg, so hätte man, wenn  $y'$  die neue Stromstärke bedeutet:

$$e = \frac{u}{2} y' + y' \text{ oder } y' = \frac{e}{\frac{1}{2}u + 1}.$$

Es wäre also  $y'$  noch kleiner als  $2i$ . Soll  $y' = 2i$  werden, so muss ein Leiter  $(u + 1)/2$  weggenommen werden. Es muss nämlich mehr als  $u/2$  aus dem Widerstande entfernt werden, weil ein Theil des Betrages von  $e$ , welcher bisher durch den Widerstand verbraucht war, jetzt zur Erhöhung des Stromes von  $i$  auf  $2i$  in rotirende Bewegung übergehen soll.

#### Verzweigte Ströme.

Als Gesetze für die Vertheilung des Stromes in einem verzweigten Leitersystem ergeben sich ohne weiteres die folgenden.

1) Denken wir uns die Drähte der Verzweigung dicht nebeneinander gelegt, so zeigt jeder Querschnitt nach aussen dieselbe electrodynamische Wirkung, es muss also die Summe der in jedem Durchschnitt vorhandenen rotirenden Bewegungen gleich gross sein. Man erhält dasselbe Resultat, wenn man von dem Satze ausgeht, dass in jedem Verzweigungspunkte ebensoviel Electricität zu- als abfliesst.

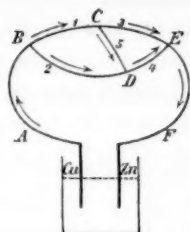
2) An jedem Verzweigungspunkte muss der Widerstand in den von ihm ausgehenden Verzweigungen gleich gross sein; wäre derselbe in einem Augenblick ungleich, so würde durch die Drähte, in welchen der Widerstand kleiner ist, sofort ein stärkerer Strom fliessen; dadurch würde aber ihr Widerstand vermehrt, während er in den anderen, für welche eine Verminderung der Stromstärke eingetreten ist, herabsinkt. Das Wachsen des Stromes in den ersteren und das Abnehmen in den anderen Drähten würde solange fortgehen, bis der Widerstand in allen Strombahnen gleich geworden ist.

3) Liegt in einem zusammenhängenden Leiterkreise eine electromotorische Kraft  $e$ , so wird zur Ueberwindung des Widerstandes in demselben nur der Betrag  $e - i$  verwendet, wenn  $i$  die in einem unverzweigten Stücke auftretende Stromstärke bedeutet.

Ich will diese drei Sätze auf die Verzweigung in der

Wheatstone'schen Brücke anwenden und nehme an, dass der Strom die durch die Pfeile angezeigte Richtung habe.

Ad 1). Es sei  $Zn\ Cu$  das Element; in dem ungetheilten Drahte  $AB$  und  $EF$  fliesse der Strom  $i$  und seine Absorptionszahl sei  $u$ ; in den mit 1, 2, 3, 4 und 5 bezeichneten Stücken mögen  $i_1, u_1; i_2, u_2$  u. s. w. die entsprechende Bedeutung haben.



Nach 1. ist

$$i = i_1 + i_2 = i_3 + i_4, \quad i_1 = i_3 + i_5, \\ \text{also auch} \quad i = i_3 + i_5 + i_2.$$

Ad 2). Den bei einer Stromstärke vorhandenen Widerstand oder die bei derselben auftretende Absorption erhält man durch Multiplication der Absorptionszahl mit der Stromstärke. Der Widerstand in den verschiedenen Theilen ist also in

$$\begin{array}{ll} EFAB & u \, i, \\ BC & u_1 i_1, \\ BD & u_2 i_2, \end{array} \quad \begin{array}{ll} CE & u_3 i_3, \\ DE & u_4 i_4, \\ CD & u_5 i_5. \end{array}$$

Im Verzweigungspunkte  $B$  muss also, wenn man die Drähte  $BCE$  und  $BDE$  bis zu ihrer Wiedervereinigung verfolgt, der Widerstand auf  $BCE$  genau so gross sein, wie auf  $BDE$ . Es ist also

$$i_1 u_1 + i_3 u_3 = i_2 u_2 + i_4 u_4 \\ \text{oder} \quad i_1 u_1 + i_3 u_3 - i_2 u_2 - i_4 u_4 = 0.$$

Ein Gleiches muss stattfinden, wenn wir anstatt der Bahn  $BCE$  die Bahn  $BCDE$  einsetzen. Es ist dann

$$i_1 u_1 + i_5 u_5 + i_4 u_4 = i_2 u_2 + i_3 u_3 \\ \text{oder nach Abzug von } i_4 u_4:$$

$$i_1 u_1 + i_5 u_5 = i_2 u_2 \\ \text{oder} \quad i_1 u_1 + i_5 u_5 - i_2 u_2 = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Ad 3). Betrachten wir nun einen Leiterkreis, welcher die Kette mit der electromotorischen Kraft  $e$  einschliesst, z. B.  $ABCEFA$ , so ist, weil in jedem Gesamtquerschnitte durch den Leiter der Strom  $i$  fließt, von der electromoto-

rischen Kraft  $e$  der in dem Strome erhaltene Betrag  $i$  abzuziehen; es bleibt daher nur  $e - i$  zur Ueberwindung des Widerstandes.

Es ist also für die Bahn  $ABCEFA$

$$e - i = iu + i_1 u_1 + i_3 u_3.$$

Ebenso erhält man für die Bahn  $ABDEFA$

$$e - i = iu + i_2 u_2 + i_4 u_4$$

und für die Bahn  $ABCDEFA$

$$e - i = iu + i_1 u_1 + i_5 u_5 + i_4 u_4.$$

Die Uebereinstimmung dieser drei Gleichungen erkennt man sofort, wenn man die unter (2) aufgeführten Gleichungen

$$i_1 u_1 + i_3 u_3 = i_2 u_2 + i_4 u_4$$

und

$$i_1 u_1 + i_5 u_5 = i_2 u_2$$

in Betracht zieht.

**Änderung der Absorption mit Länge und Dicke des Leiters.**

Wird die Länge eines gegebenen Leiters von überall gleichem Querschnitte vergrößert, so wächst in gleichem Maasse die Anzahl der Molecüle, welche in Bewegung zu setzen sind; es nimmt also selbstverständlich die Absorptionszahl proportional der Länge zu.

Das Gesetz über die Abhängigkeit der Absorptionszahl vom Querschnitte ergibt sich in folgender Weise. Eine geschlossene Kette enthalte zwei Drähte aus demselben Material und von gleicher Länge, aber von verschiedenem Querschnitte. Der dickere Draht habe z. B. einen vierfach grösseren Querschnitt als der dünnere. Die durch die electrodynamische Wirkung im äusseren Raume gemessene Stärke des Stromes  $i$  ist überall in dem gleichen Abstände von der Mitte des Leitungsdrahtes dieselbe. Die von jedem Querschnitte ausgehende Wirkung entspricht der Summe der Rotationen der in ihm vorhandenen Molecüle. Soll nun die Wirkung des dickeren Drahtes dieselbe sein, wie die des dünneren, so müssen die Rotationen in dem ersteren, da er viermal so viel Molecüle enthält als der letztere, eine viermal kleinere Geschwindigkeit besitzen, als in dem dünnen Drahte, weil dann die Summe der Rotationen in beiden Drähten dieselbe ist.

Denken wir uns nun den dickeren Draht von vierfachem Querschnitt in vier gleich dicke Streifen zerlegt, so gleicht jeder einzelne Streifen dem dünnen Drahte. Die Absorptionszahl des dünnen Drahtes sei  $u$  für die Einheit der Stromstärke, dann ist dieselbe für jeden Streifen bei der Stromstärke 1 ebenfalls  $u$ . In dem dünneren Drahte fliesst der Strom  $i$ , folglich ist seine Absorption  $ui$ ; in jedem Streifen fliesst dagegen nur der Strom  $i/4$ ; die Absorption, welche der durch jeden Streifen gehende Strom  $i/4$  findet, ist also nur  $ui/4$ , beträgt also nur ein Viertel von der, welche jeder Streifen bei der Stromstärke  $i$  zeigen würde.

Stromstärke bei mehreren Elementen.

Es möge ein Element Zink-Cadmium-Wasser die electromotorische Kraft  $e$ , ein gleichgestaltetes Element Zink-Kupfer-Wasser aber die electromotorische Kraft  $E = 4e$  besitzen. Wegen der gleichen Länge und Dicke der Wassersäule ist in beiden der Widerstand gleich, daher die Absorptionszahl für beide  $= u$ .

Man erhält dann für das Element ( $Zn\ Cd\ Ag$ ):

$$e = ui + i, \quad e - i = ui \quad \text{und} \quad i = \frac{e}{u + 1};$$

für das Element ( $Zn\ Cu\ Ag$ ):

$$E = ui' + i', \quad E - i' = ui' \quad \text{und} \quad i' = \frac{E}{u + 1} = \frac{4e}{u + 1}.$$

Der Strom  $i'$  hat also die vierfache Stärke des Stromes  $i$ .

Bei dem Element ( $Zn\ Cd\ Ag$ ) wird folglich der Betrag  $e - i$  zur Ueberwindung des Widerstandes, und bei dem Element ( $Zn\ Cu\ Ag$ ) der Betrag  $E - i' = 4e - i'$  ebendazu verbraucht.

Vergrössern wir ferner die Länge der Wassersäule in dem Element ( $Zn\ Cu\ Ag$ ) auf die vierfache Länge, so entsteht ein Strom  $i''$ , wobei  $4e = 4ui'' + i'' = (4u + 1)i''$ . Es wird also  $i'' = 4e/(4u + 1)$ . Es ist auch jetzt der Betrag  $4e - i''$  zur Ueberwindung des Widerstandes verwendet.

Nehmen wir dagegen vier Elemente ( $Zn\ Cd\ Ag$ ), so ist die Summe der in ihnen auftretenden electromotorischen Kräfte allerdings auch  $4e$ , also ebenso gross, wie bei einem einzigen Zink-Kupferelement; desgleichen ist die Absorptions-

zahl wie in dem letzten Falle  $4u$ , und doch sind die Verhältnisse sehr wesentlich verändert. Die electromotorische Kraft ist nicht auf eine Stelle concentrirt, sondern ist auf vier Punkte vertheilt.

Entsteht bei dieser Anordnung ein Strom  $i'''$ , so ist in jedem Querschnitt des Schliessungskreises eine Rotation  $i'''$  vorhanden. An jeder Stelle, wo eine electromotorische Kraft  $e$  liegt, übertrifft also diese electromotorische Kraft  $e$  die Stromrotation  $i'''$  um  $e - i'''$  und nur dieser Betrag kann auf die Ueberwindung des Widerstandes verwendet werden. Dies gilt von jeder der vier electromotorischen Kräfte  $e$ ; jedes  $e$  liefert also zur Ueberwindung des Widerstandes nur den Betrag  $e - i'''$ , folglich alle vier den Betrag  $4(e - i''')$ . Dieser Betrag dient, wenn kein weiterer Widerstand eingeschaltet ist, zur Ueberwindung des Widerstandes  $4ui'''$ . Es ist mithin  $4(e - i''') = 4ui'''$  oder  $e - i''' = ui'''$ , d. h. der Strom ist nur ebenso stark als in einem Elemente, nämlich  $i''' = e/(u + 1)$ .

Schaltet man noch einen Draht von der Absorptionszahl  $a$  ein, so gehen für die verschiedenen Fälle die Gleichungen hervor:

$$\begin{aligned} e - i &= ui + ai, & e &= (u + a + 1)i, & i &= \frac{e}{(u + 1) + a}, \\ 4e - i' &= ui' + ai', & 4e &= (u + a + 1)i', & i' &= \frac{4e}{(u + 1) + a}, \\ 4e - i'' &= 4ui'' + ai'', & 4e &= (4u + a + 1)i'', & i'' &= \frac{4e}{(4u + 1) + a}, \\ 4(e - i''') &= 4ui''' + ai''', & 4e &= [4(u + 1) + a]i''', & i''' &= \frac{4e}{4(u + 1) + a}. \end{aligned}$$

#### Wärmeentwicklung.

Wenn durch einen Draht kein Strom fließt, mögen die einzelnen Bestandtheile seiner Molecüle eine bestimmte Lage gegen die nächsten Molecüle einnehmen. Tritt ein electrischer Strom ein, so ändert sich diese Anordnung und die Molecüle eines Querschnittes üben auf die Molecüle des folgenden eine Kraft aus, um sie in gleiche Rotation zu setzen. Die Molecüle sind bestrebt, stets den ursprünglichen Zustand wieder herzustellen, daher bedarf es der fortwäh-



renden Aufwendung einer Kraft, um den Zwangszustand zu erhalten.

Der Widerstand wächst mit der Stromstärke und habe bei der Stromstärke  $i$  die Grösse  $u'i$ . Dieser Widerstand ist nun auf einer der Rotationsgeschwindigkeit  $i$  gleichen Länge zu überwinden, sodass eine mit  $u'i^2$  proportionale Hemmung der Bewegung entsteht, wodurch eine entsprechende Wärmemenge entwickelt wird.

Bedeutet  $u'$  die auf der Einheit der Länge vorhandene Absorptionszahl, so ist hiernach die in einer Drahtlänge  $l$  während der Zeit  $t$  erzeugte Wärme proportional mit  $u'i^2lt$ .

#### Electrische Spannung an den Enden der Kette.

An den Enden eines galvanischen Elementes, das nicht geschlossen ist, beobachtet man eine electriche Spannung, welche die Grösse seiner electromotorischen Kraft misst. Diese electromotorische Kraft wird in der geschlossenen Kette, wie gezeigt, verwendet: 1) zur Ueberwindung von Widerständen und 2) zur Erzeugung der Rotation der Moleküle. Dann kann nur der zur Ueberwindung des Widerstandes zu verwendende Theil noch als Spannung an den Enden auftreten, während der in der Rotationsbewegung enthaltene Theil zu keiner Spannung Veranlassung gibt. Es ist nach dem Früheren  $e = ui + i$ ;  $ui$  bedeutet den zur Ueberwindung des Widerstandes nöthigen Theil von  $e$ , also die an den Polen der galvanischen Kette vorhandene Spannung. Wird dieselbe mit  $e'$  bezeichnet, sodass also  $e' = ui$ , so erhält man  $e = e' + i$  oder  $e - e' = i$ .

Die Stromstärke in einer Kette ist aber auch  $i = e/(u+1)$  und wird also um so kleiner, je grösser  $u$  wird; mit der Abnahme von  $i$ , also mit der Vergrösserung von  $u$  nähert sich mithin  $e'$  immer mehr dem  $e$ .

Ich habe oben p. 372 ausgesprochen, dass es ein Verfahren gibt, durch welches die Werthe von  $i$  und  $e$  in demselben Maasse bestimmt werden können. Dasselbe gründet sich auf das soeben beschriebene Verhalten der electriche Spannung an den Polen der offenen und der geschlossenen Kette.

## Experimenteller Nachweis.

Die Pole eines grossen Daniell'schen Elementes wurden nacheinander mit dem Goldblättchen meines Electrometers verbunden, während der andere Pol durch eine Verbindung mit der Gasleitung zur Erde abgeleitet war. Aus den an beiden Polen beobachteten, sehr nahe gleichen Ausschlägen wurde das Mittel als die Spannung an den Polen des Elementes genommen.<sup>1)</sup>

Darauf wurde das Element mittelst eines Leiters von sehr grossem Widerstande, z. B. von 10000 Quecksilbereinheiten geschlossen. Hierbei zeigte sich keine merkliche Abnahme des Ausschlages. Als jedoch der Widerstand des eingeschalteten Leiters verringert wurde, trat eine merkbare Veränderung in den Spannungen an den beiden Polen auf.

Ich übergehe die mit grossen Widerständen ausgeführten Beobachtungen und wende mich gleich zu denen, bei welchen geringere Widerstände in der Kette lagen und die Abnahme in der Spannung an den Polen recht deutlich hervortrat.

Auch bei der geschlossenen Kette wurden die Beobachtungen an beiden Polen ausgeführt, wobei jedesmal der eine Pol zur Erde abgeleitet war. Aus den beiden sehr nahe gleichen Werthen, welche an den beiden Polen beobachtet waren, wurde wieder das Mittel genommen.<sup>2)</sup>

1) Da der Zustand meiner Augen mir die Ablesung der Ausschläge unmöglich machte, so hat Hr. Prof. v. Zahn die Güte gehabt, die Beobachtungen am Electrometer und die Berechnung der Mittelwerthe auszuführen, wofür ich ihm hier meinen herzlichsten Dank abstatte.

2) In Betreff der bei diesen Messungen möglichen Genauigkeit bemerke ich Folgendes. Die Theilstriche des Ocularmikrometers, auf welche die Spitze des Goldblättchens sich projecirte, erschienen ungefähr 1 mm voneinander entfernt. Mit voller Sicherheit konnte daher die Lage des Goldblättchens nur auf 0,2 Scalentheile bestimmt werden. Da ferner die Versuche in meinem an der Strasse gelegenen Wohnzimmer ausgeführt wurden, so veranlassten die vorüberfahrenden Wagen kleine Störungen. Die Erschütterung änderte nämlich den Zustand der Elemente in der nassen Säule, deren Pole mit den beiden neben dem Goldblättchen befindlichen Messingscheiben verbunden waren, öfters in ungleicher Weise, sodass der eine Pol etwas stärker wurde als der andere. Dies hatte aber eine Aenderung in der Ruhelage des Goldblättchens zur Folge. Wurde

Die Mittelwerthe der bei den verschiedenen Widerständen gemachten Beobachtungen waren die nachstehenden. Der Widerstand der eingeschalteten Drähte ist in Quecksilber-einheiten angegeben:

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| Kette offen                   | 38,87 |
| „ geschlossen durch 0,5 Q.-E. | 30,84 |
| „ offen                       | 38,54 |
| „ offen                       | 38,65 |
| „ geschlossen durch 0,3 Q.-E. | 27,64 |
| „ offen                       | 33,52 |
| „ geschlossen durch 1 Q.-E.   | 33,71 |
| „ offen                       | 38,82 |

Nach einer Unterbrechung von 15 Minuten:

|                                 |       |
|---------------------------------|-------|
| Kette geschlossen durch 2 Q.-E. | 38,85 |
| „ offen                         | 38,56 |
| „ geschlossen durch 3 Q.-E.     | 36,65 |
| „ offen                         | 38,45 |

Vergleicht man nun die Mittel der vor und nach jeder Schliessung gemachten Beobachtungen der offenen Kette, mit den bei dem dazwischen liegenden Schlusse gemessenen, und ordnet die Versuche nach der Reihe der eingeschalteten Widerstände, vom grössten beginnend, so erhält man:

|         | $e$   | $e'$  | $i$   | $u + 1$ | $u$   |
|---------|-------|-------|-------|---------|-------|
| 3 Q.-E. | 38,51 | 36,65 | 1,86  | 20,70   | 19,70 |
| 2 „ „   | 38,56 | 35,85 | 2,71  | 14,23   | 13,23 |
| 1 „ „   | 38,67 | 33,71 | 4,96  | 7,80    | 6,80  |
| 0,5 „ „ | 38,70 | 30,84 | 7,86  | 4,92    | 3,92  |
| 0,3 „ „ | 38,59 | 27,64 | 10,95 | 3,52    | 2,52  |

In dieser Tabelle stehen unter  $e$  die an den Polen der offenen Kette beobachteten Spannungen, unter  $e'$  die an den Polen der geschlossenen Kette erscheinenden. Der Unterschied zwischen  $e$  und  $e'$ , d. h. der von  $e$  durch den Widerstand nicht absorbirte Theil, bildet den Strom  $i$ ; es ist also  $e - e' = i$ . Diese Differenzen, welche also die Stromstärke angeben, finden sich in der dritten Columne unter  $i$  zusammengestellt. Wird  $e$  durch  $i$  dividirt, so erhält man den Werth von  $u + 1$ , worin  $u$  die Absorptionszahl des Schliessungsbogens bedeutet. Diese Zahlen stehen in der vierten Columne, während die fünfte die Werthe von  $u$  selbst enthält.

nun auch bei jeder Messung der electricen Spannung die Ruhelage vorher und nachher bestimmt, so konnte doch der Fehler dadurch noch um 0,1 Scalenth. wachsen.

Die verschieden starken electrischen Ströme sind dadurch erhalten worden, dass mehr oder weniger Widerstand in die Kette eingeschaltet wurde. Bezeichnen wir die Stromstärke der Reihe nach mit  $i_{0,3}$ ,  $i_{0,5}$ ,  $i_1$ , u. s. w. und ebenso die ihnen zugehörige Absorptionszahl mit  $u_{0,3}$ ,  $u_{0,5}$ ,  $u_1$ , u. s. w., so wird, wenn  $x$  die Absorptionszahl der Kette selbst,  $y$  die Absorptionszahl für eine Quecksilbereinheit bezeichnet:

$$\begin{array}{ll} x + 3y = 19,70 = u_3, & x + 0,5y = 3,92 = u_{0,5}, \\ x + 2y = 13,23 = u_2, & x + 0,3y = 2,52 = u_{0,3}, \\ x + 1y = 6,80 = u_1, & \end{array}$$

Ermittelt man aus diesen fünf Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe, so erhält man

$$x = 0,638 \quad \text{und} \quad y = 6,351.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die obigen Gleichungen ergibt sich:

$$\begin{array}{ll} 0,638 + 19,053 = 19,69 & 20,69 \\ 0,638 + 12,702 = 13,34 & 14,34 \\ 0,638 + 6,357 = 6,99 & 7,99 \\ 0,638 + 3,175 = 3,81 & 4,81 \\ 0,638 + 1,905 = 2,54 & 3,54 \end{array}$$

Wird die beobachtete electromotorische Kraft  $e$  durch den entsprechenden Werth von  $u + 1$  dividirt, so erhält man  $e/(u + 1) = i$ . Die Berechnung liefert:

|           | $i$     |          |        |
|-----------|---------|----------|--------|
|           | berech. | beobach. | Diff.  |
| $i_0$     | = 1,86  | 1,86     | 0      |
| $i_{0,5}$ | = 2,68  | 2,71     | + 0,03 |
| $i_1$     | = 4,84  | 4,96     | + 0,12 |
| $i_{0,3}$ | = 8,04  | 7,86     | - 0,18 |
| $i_{0,3}$ | = 10,93 | 10,95    | + 0,02 |

Die berechneten Werthe stimmen also mit den beobachteten hinreichend überein.<sup>1)</sup>

1) Man könnte bei den vorstehenden Versuchen vermissen, dass die Stromstärken nicht mit einem Galvanometer gemessen wurden. Diese Zugabe hätte den Apparat und die Beobachtungen unnöthig complicirt; es lässt sich nämlich leicht der Beweis führen, dass die obigen Werthe von  $i$  in der That Werthe darstellen, welche den mit einem Galvanometer beobachteten proportional sind.

Zu diesem Zwecke will ich zwei Werthe von  $i$ , z. B.  $i_{0,3}$  und  $i_2$ , als

## Absorptionszahlen und Absorptionscoëfficienten.

Nachdem im Vorstehenden die Absorptionszahl für eine Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt bestimmt worden, lassen sich die Absorptionscoëfficienten  $v$  für ebenso lange und dicke Drähte von anderen Metallen angeben. Es wird nämlich nachher bewiesen werden, dass die

Ausschläge eines Galvanometers betrachten und dann nach der bisher üblichen Weise aus den Stromstärken die Werthe von  $E$  und  $W$  berechnen. Man hat also

$$I_{0,3} = 10,95 = \frac{E}{W + 0,3}, \quad I_2 = 2,71 = \frac{E}{W + 2}.$$

Hieraus erhält man

$$W = 0,259 \quad \text{und} \quad E = 6,12.$$

Werden mit diesen Werthen von  $W$  und  $E$  die übrigen drei beobachteten Stromstärken berechnet, so erhält man

$$\begin{array}{lll} \text{berechnet:} & \frac{E}{W + 3} = 1,88, & \frac{E}{W + 1} = 4,86, & \frac{E}{W + 0,5} = 8,07, \\ \text{beobachtet:} & 1,86, & 4,96, & 7,86. \end{array}$$

Ein Galvanometer hätte also Zahlen ergeben, welche den aus den electrometrischen Messungen abgeleiteten proportional gewesen wären.

Da jedoch bei einer anderen Veranlassung die Stromintensitäten eines Daniell'schen Elementes von gleicher GröÙe, unter Einschaltung der eben benutzten Widerstände 0,3, 0,5, 1, 2 und 3 bestimmt wurden, so will ich die gefundenen Werthe hier folgen lassen. Die Stromstärke wurde mit einer Tangentenboussole, deren Kreis nur in ganze Grade getheilt war, gemessen.

Zwischen den Beobachtungen bei Einschaltung der verschiedenen Widerstände 0,3, 1, 2 und 3 wurde stets die Messung der Stromstärke bei Einschaltung von 0,5 wiederholt, um ein Urtheil über die Veränderung der Kette zu gewinnen. Es wurde beobachtet:

|                      |           |       |           |       |
|----------------------|-----------|-------|-----------|-------|
| bei Einschaltung von | 0,5 Q.-E. | 0,413 | 0,3 Q.-E. | 0,555 |
|                      | 0,5 "     | 0,419 | 1,0 "     | 0,261 |
|                      | 0,5 "     | 0,414 | 2 "       | 0,139 |
|                      | 0,5 "     | 0,412 | 3 "       | 0,093 |

Betrachten wir die Kette als constant und nehmen für die Stromstärke bei Einschaltung von 0,5 Q.-E. den Werth 0,414, so gehen demnach

|                      |       |       |       |       |       |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| bei Einschaltung von | 0,3   | 0,5   | 1     | 2     | 3     |
| die Stromstärken     | 0,555 | 0,414 | 0,261 | 0,139 | 0,093 |

hervor. Setzt man dagegen die Stromstärke bei Einschaltung von 0,5 Q.-E. gleich 7,86, so werden die Verhältnisse der obigen Zahlen:

$$10,53 \quad 7,86 \quad 4,90 \quad 2,64 \quad 1,78.$$

Dies sind aber nahe dieselben Werthe, wie sie sich oben aus den electrometrischen Messungen ergeben haben.

in der bisherigen Weise gemessenen Widerstände  $W$  den Absorptionszahlen proportional sind. Die Absorptionscoëfficienten aber werden nach p. 374 aus den Absorptionszahlen  $u$  durch Division derselben mit  $u + 1$  erhalten.

|                | $W$    | $e$   | $u$   | $i$ | $e$ | $v$   | $i$   |
|----------------|--------|-------|-------|-----|-----|-------|-------|
| Quecksilber .  | 1,000  | 7,351 | 6,351 | 1   | 1   | 0,864 | 0,136 |
| Platin . . .   | 0,143  | 1,908 | 0,908 | 1   | 1   | 0,476 | 0,524 |
| Eisen . . . .  | 0,125  | 1,794 | 0,794 | 1   | 1   | 0,443 | 0,557 |
| Zink . . . . . | 0,0667 | 1,424 | 0,424 | 1   | 1   | 0,298 | 0,702 |
| Kupfer . . . . | 0,0185 | 1,117 | 0,117 | 1   | 1   | 0,105 | 0,895 |
| Silber . . . . | 0,0169 | 1,107 | 0,107 | 1   | 1   | 0,097 | 0,903 |

In der zweiten Columnne der vorstehenden Tabelle sind die Widerstände für Quecksilber = 1 aufgeführt; die Zahlen der dritten, vierten und fünften Columnne geben unter  $e$  die electromotorische Kraft an, welche bei der unter  $u$  bezeichneten Absorptionszahl einen Strom von der Stärke 1 entstehen lässt. Die Zahlen der sechsten, siebenten und achten Columnne geben unter  $v$  an, wieviel von der electromotorischen Kraft  $e = 1$  durch den Widerstand absorbirt wird und unter  $i$ , wieviel in den Strom übergeht.

Beziehungen der im Vorhergehenden aufgestellten Formeln zu den bisher üblichen.

Ich will nun zum Schlusse noch zeigen, in welcher Beziehung die von mir gegebenen Ausdrücke zu den bisher benutzten stehen.

#### Ohm'sches Gesetz.

In dem von Ohm für die Stärke eines electrischen Stromes aufgestellten Gesetze  $I = E/W$  ist  $I$  die Stromstärke,  $E$  die electromotorische Kraft und  $W$  soll den Widerstand der Kette bedeuten. Die Werthe von  $E$  und  $W$  werden aber bei der Anwendung der vorstehenden Formel nicht direct gemessen, sondern durch Rechnung aus gemessenen Stromstärken hergeleitet.

Es sei für eine gegebene Kette  $I = E/W$ ; durch Einschaltung eines bekannten Widerstandes  $A$  geht der vorstehende Ausdruck über in  $I' = E/(W + A)$ . Schaltet man anstatt  $A$  einen Widerstand  $W'$  von noch unbekannter Grösse ein, so erhält man  $I'' = E/(W + W')$ .

Oben p. 385 habe ich gezeigt, dass die mit dem Galvanometer gemessenen Stromstärken genau den nach den Gleichungen  $i = e - e'$  berechneten proportional sind. Wir können also setzen  $I = mi$ ,  $I' = mi'$  und  $I'' = mi''$ .

Berechnet man aus den vorstehenden Gleichungen  $W'/A$ , so ergibt sich

$$\frac{W'}{A} = \frac{I(I - I')}{I''(I - I'')} = \frac{i'(i - i'')}{i''(i - i'')},$$

also der nämliche Ausdruck, der p. 375 für  $u'/a$  gefunden wurde.  $A$  und  $W'$  unterscheiden sich von  $a$  und  $u'$  also nur durch einen constanten Factor  $n$ ; es ist somit  $A = na$  und  $W' = nu'$ .

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt

$$W = \frac{I' \cdot A}{I - I'} = \frac{mi' na}{m(i - i')} = \frac{na \cdot i'}{i - i'}.$$

Da nun früher aus den Gleichungen

$$i = \frac{e}{u + 1}, \quad i' = \frac{e}{(u + 1) + a}$$

der Werth  $u + 1 = i'a/(i - i')$  erhalten wurde, so ist  $W = n(u + 1)$ .  $W$  unterscheidet sich also von  $u + 1$  nur durch denselben Factor, mit welchem die willkürliche Maasseinheit für den Widerstand multiplicirt ist.<sup>1)</sup>

1) Ist der Factor  $n$  bekannt, so lässt sich aus dem in der bisher üblichen Weise gefundenen Werthe von  $W$  die Absorptionszahl der Kette  $u$  berechnen. Nehmen wir z. B. die beiden mittelst der Tangentenboussole p. 385 gemessenen Stromstärken

$$I_{0,5} = 0,414 = \frac{E}{W + 0,5} \quad \text{und} \quad I_2 = 0,139 = \frac{E}{W + 2},$$

so ergibt sich

$$W = 0,258.$$

Nun hatten wir p. 384 für die Quecksilbereinheit die Absorptionszahl 6,351 gefunden, sonach ist die Einheit für die Absorptionszahl  $1/6,351 \times$  der Quecksilbereinheit, d. h.  $n = 1/6,351$ . Man verwandelt also nach Quecksilbereinheiten gemessene Widerstände in Absorptionszahlen durch Multiplication mit 6,351. Dem oben berechneten Werthe von  $W = 0,258$  liegt die Quecksilbereinheit zu Grunde.

Man erhält hiernach aus der Formel  $0,258 = n(u + 1)$ :

$$u + 1 = \frac{0,258}{n} = 0,258 \cdot 6,351 = 1,639,$$

folglich

$$u = 0,639.$$

Dieser Werth stimmt zufällig mit dem p. 384 gefundenen Werthe  $x = 0,638$  überein. Bei der letzten Messung war zwar der dicke Kupfer-



Berechnet man aus der Gleichung  $IW = E$  den Werth von  $E$ , so wird derselbe, da  $I = mi$  und  $W = n(u + 1)$ :

$$E = mi \cdot n(u + 1),$$

oder, da  $i(u + 1) = e$ :

$$E = mne.$$

Die Werthe  $E, I, W$  entsprechen also den Grössen  $e, i, u + 1$ ; sie sind nur durch gewisse constante Factoren von denselben verschieden.

Verstehen wir also unter  $W$  nicht den Werth  $nu$ , wo  $u$  die Absorptionszahl des ursprünglich gegebenen Leiterkreises bedeutet, sondern setzen  $W = n(u + 1)$ , so ist die Ohm'sche Formel mit der von mir aufgestellten in Uebereinstimmung.

Weiter in diese Kette eingeschaltete Widerstände  $W', W''$  u. s. w. sind den Absorptionszahlen proportional, also  $W' = nu', W'' = nu''$  u. s. w.

Nach der bisherigen Auffassung soll der Widerstand eines gegebenen Leiterkreises von der Stärke des in ihm fliessenden Stromes unabhängig, also constant sein. Zufolge der im Vorhergehenden aufgestellten Theorie ist jedoch der Widerstand von der Stromstärke abhängig und wächst mit ihr proportional. Wenn in der Ohm'schen Formel  $I = E/W$  der Werth von  $W$  als von der Stromstärke unabhängig erscheint, so liegt der Grund darin, dass  $W$  nicht den bei der Stromstärke  $I$  vorhandenen Widerstand bedeutet, sondern den Werth  $n(u + 1)$ , wo  $u$  die auf die Einheit der Stromstärke bezogene constante Absorptionszahl und  $n$  einen constanten Factor bezeichnet.

#### Kirchhoff'sche Gesetze.

Das erste der oben p. 376 aufgestellten Gesetze  $i = i' + i''$  ist mit dem Kirchhoff'schen gleichbedeutend.

Das zweite  $i'u' + i''u'' = 0$  u. s. w. stimmt ebenfalls mit

draht der Tangentenboussole dem Schliessungskreise hinzugefügt, andererseits aber war die Flüssigkeit in dem Daniell'schen Elemente in grösserer Höhe eingefüllt, und so hat sich zufälliger Weise die Vermehrung des Widerstandes durch Hinzufügung der Tangentenboussole, mit der Verminderung desselben infolge der Vergrösserung des Querschnittes der Flüssigkeit ausgeglichen.

dem Kirchhoff'schen  $i'w' + i''w'' = 0$  überein, da  $w' = nu'$ ,  $w'' = nu''$ .. ist. In dem dritten Gesetze  $E = iw + i'w' + i''w''$  werden die Grössen  $w, w', w''$ ... als völlig analog betrachtet. Dies ist aber nicht der Fall. Während  $w' = nu'$ ,  $w'' = nu''$ , gilt für  $w$ , welches dem Theile der Kette entspricht, in welchem sich die electromotorische Kraft  $E$  befindet, die Gleichung:

$$w = n(u + 1).$$

Setzt man für  $w$  diesen Werth, so fällt auch der oben von mir aufgestellte Ausdruck mit dem von Kirchhoff gegebenen zusammen.

#### Joule'sches Gesetz.

Nach Joule ist die Wärmeentwicklung durch den Strom  $i$  in einem Drahte vom Widerstande  $w'$  und von der Länge  $l$  während der Zeit  $t$  proportional mit  $w' i^2 l t$ . In diesem Ausdrucke ist aber  $w'$  nicht der effective Widerstand des Drahtstückes bei der Stromstärke  $i$ , sondern  $w'$  ist der Absorptionszahl  $u'$  proportional,  $w' = nu'$ , sodass auch zwischen diesem Ausdrucke und dem oben p. 381 von mir gegebenen Uebereinstimmung herrscht.

# VII. Ueber thermoelectrische Ströme in Krystallen; von Th. Liebisch.

(Aus den Göttinger Nachr. vom 2. Nov. 1889; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Vor kurzem hat H. Bäckström<sup>1)</sup> die erste quantitative Bestimmung der Abhängigkeit der thermoelectrischen Kraft von der krystallographischen Richtung in einem thermoelectrisch anisotropen Krystall durchgeführt, welche gestattet, das Gesetz dieser Abhängigkeit einer Prüfung zu unterziehen. Das von ihm benutzte Material bestand aus Eisenglanz von der Peder Ankers Grube auf der Insel Langö bei Kragerö in Norwegen. Bezeichnet man die auf Kupfer bezogene thermoelectromotorische Kraft in Volt für einen Grad nach der Richtung der Axe der Isotropie mit  $\tau_\gamma$ , nach den zu dieser Axe senkrechten Richtungen mit  $\tau_\alpha$ , so ist in jenem Eisenglanz:

$$\tau_\gamma = 0,032879, \quad \tau_\alpha = 0,03138.$$

Für eine unter  $\omega = 27^\circ 15'$  gegen die Axe  $\gamma$  geneigte Richtung beträgt die thermoelectrische Kraft  $\tau = 0,032923$  Volt.

H. Bäckström bemerkt, dass er aus  $\tau_\gamma$  und  $\tau_\alpha$  den mit dem gemessenen Werthe sehr nahe übereinstimmenden Werth  $\tau = 0,032928$  „nach der Gleichung der Ellipse“ berechnet habe. Allein es fehlt eine nähere Angabe über diese Ellipse. Man überzeugt sich indessen leicht, dass die Gleichung:

$$(1) \quad \frac{\cos^2 \omega}{\tau_\gamma^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\tau_\alpha^2} = \frac{1}{\tau^2},$$

also die Relationen:

$$\tau = \frac{\tau_\gamma}{\cos \varphi}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{\tau_\alpha^2 - \tau_\gamma^2}{\tau_\alpha^2} \sin^2 \omega$$

genau auf den von H. Bäckström mitgetheilten Werth von  $\tau$  führen.

Sollte H. Bäckström in der That die Ellipse (1) benutzt haben, woran nach seinen Zahlenangaben nicht zu zweifeln ist, so würde die Uebereinstimmung zwischen Be-

1) H. Bäckström, Oefvers. K. Vetensk.-Förh. 1888. No. 8. p. 553.

obachtung und Berechnung auf einem Zufalle beruhen. Denn das vor längerer Zeit von W. Thomson<sup>1)</sup> aus den Principien der Thermodynamik abgeleitete Gesetz für die electromotorischen Kräfte, welche durch ungleichmässige Temperaturvertheilungen in leitenden Krystallen mit einer Axe der Isotropie hervorgerufen werden, ergibt eine andere Beziehung zwischen den Grössen  $\tau$ ,  $\tau_a$ ,  $\omega$  und  $\tau$ , aus der ein etwas stärker abweichender, immerhin aber mit der Messung noch recht gut übereinstimmender Werth von  $\tau$  folgt.

## I.

Um das W. Thomson'sche Gesetz zu formuliren, betrachten wir einen Stab aus einem Krystall des hexagonalen oder tetragonalen Systems, der longitudinal in einen, aus einem isotropen Normalmetall hergestellten Stromkreis eingeschaltet ist. Der Stab habe die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit den Kantenlängen  $a$ ,  $b$ ,  $l$ . Die Seitenflächen mit dem Flächeninhalt  $bl$  seien parallel zum Hauptschnitte der Längsrichtung  $l$ , sodass jede zu ihnen parallele Ebene eine thermoelectrische Symmetrieebene ist. Alsdann haben die Kanten  $a$  des Stabes die Richtung einer Symmetrieaxe von der Periode 2.

Der Winkel zwischen der Längsrichtung und der Axe der Isotropie  $Z$  werde  $= \omega$  gesetzt.

Fliesst durch eine Endfläche des Stabes, deren Inhalt  $ab$  ist, in der Zeiteinheit die Electricitätsmenge  $\mathfrak{Q}$ , so möge die Strömung durch diese Fläche (die Stromintensität für die Flächeneinheit) hinfort bezeichnet werden mit  $U = \mathfrak{Q}/ab$ .

Ferner seien  $\tau$ , und  $\tau_a$  die thermoelectrischen Kräfte zwischen dem Normalmetall und zwei Stäben, die parallel und senkrecht zu  $Z$  aus dem Krystall geschnitten sind.

A. Wird nun der gleichförmig erwärmte Stab von einem stationären electrischen Strom in der Längsrichtung durchflossen, so erfolgt nach dem für die Peltier'sche Wärme geltenden Gesetze an der Eintrittsfläche in der Zeiteinheit für die Flächeneinheit die Wärmeabsorption:

$$(a) \quad \frac{1}{J} \cdot U \cdot \vartheta (\tau \cos^2 \omega + \tau_a \sin^2 \omega),$$

1) W. Thomson, Trans. Roy. Soc. Edinburgh 21. p. 153. 1857. Math. phys. Papers. Cambridge 1. p. 266. 1882.

worin  $J$  das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit und  $\vartheta$  die absolute Temperatur der Eintrittsfläche bedeuten. Gleichzeitig findet an der Austrittsfläche eine Wärmeentwicklung von demselben Betrage statt.

Bezeichnet man den in Klammern eingeschlossenen Factor (a) mit  $\tau$ , so ist ersichtlich, dass die Abhängigkeit des an einer Endfläche durch den Strom erzeugten Peltier-Effectes von der Längsrichtung des Stabes durch die Quadrate der Radien  $\sqrt{\tau}$  des Umdrehungsvaloids:

$$(2) \quad \tau_r \cos^2 \omega + \tau_a \sin^2 \omega = \tau$$

repräsentirt werden kann. Die Richtung der Umdrehungsaxe ist durch die Axe der Isotropie  $Z$  bestimmt. Die Längen der Halbaxen parallel und senkrecht zu  $Z$  sind gegeben durch  $\sqrt{\tau_r}$  und  $\sqrt{\tau_a}$ .

An Stelle des Ovals (2) kann aber auch die inverse Curve, eine Ellipse mit den Halbaxen  $1/\sqrt{\tau_r}$  und  $1/\sqrt{\tau_a}$ :

$$(3) \quad \tau_r x^2 + \tau_a y^2 = 1$$

zur geometrischen Darstellung jener Abhängigkeit benutzt werden. Jedenfalls dienen zur Berechnung von  $\tau$  aus gegebenen Werthen von  $\tau_r$ ,  $\tau_a$ ,  $\omega$  die Relationen:

$$\tau = \tau_a \cos^2 \psi, \quad \sin^2 \psi = \frac{\tau_a - \tau_r}{\tau_a} \cos^2 \omega.$$

B. Herrschen auf den Seitenflächen des Stabes übereinstimmende Temperaturen, dagegen auf den Endflächen verschiedene Temperaturen  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_0'$ , so entsteht, wenn die Endflächen durch einen homogenen, gleichmässig erwärmten Schliessungsbogen aus dem Normalmetall verbunden werden, ein electrischer Strom in der Längsrichtung des Stabes, dessen electromotorische Kraft  $F$  nach W. Thomson gegeben ist durch:

$$(b) \quad F = \int_{\vartheta_0'}^{\vartheta_0} (\tau_r \cos^2 \omega + \tau_a \sin^2 \omega) d\vartheta.$$

Die Abhängigkeit der thermoelectrischen Kraft:

$$\frac{dF}{d\vartheta} = \tau_r \cos^2 \omega + \tau_a \sin^2 \omega = \tau$$

von der Längsrichtung des Stabes wird demnach durch dasselbe Umdrehungsvaloid dargestellt, welches die Abhängig-

keit des Peltier-Effectes an den Endflächen des Stabes von jener Richtung angibt. Dieses Resultat war zu erwarten, da der Peltier-Effect der thermoelectrischen Kraft und der absoluten Temperatur proportional ist.

Hieraus folgt für die auf p. 392 angegebenen Werthe von  $\tau$ ,  $\tau_a$ ,  $\omega$  der mit H. Bäckström's Messung befriedigend übereinstimmende Werth  $\tau = 0,0,2933$ .

## II.

Ein rechtwinkliges Parallelepipèd aus einem homogenen leitenden Krystall des triklinen Systems sei vollständig eingebettet in das homogene isotrope Normalmetall. Parallel zu den Kantenrichtungen sei ein Axensystem  $X_1, X_2, X_3$  durch den Mittelpunkt  $O$  gelegt.

Die ungleichmässige Temperaturvertheilung, welche dadurch hervorgerufen wird, dass einander gegenüberliegende Seitenflächen des Parallelepipèds auf verschiedenen Temperaturen gehalten werden, erzeugt einen electrischen Strom. Nach W. Thomson ist die thermoelectrische Kraft  $\tau$  in der Richtung  $\xi$  des stärksten Temperaturgefälles:

$$(c) \quad \tau = \sum_{h,k=1}^3 \tau_{hk} \cos(\xi X_h) \cos(\xi X_k).$$

Die neun Coëfficienten  $\tau_{hk}$  sind die thermoelectrischen Constanten des Krystalls.

Hieraus ist ersichtlich, dass wir zwei Oberflächen benutzen können, um die Abhängigkeit der thermoelectrischen Kraft  $\tau$  von der Richtung  $\xi$  und den Constanten  $\tau_{hk}$  geometrisch darzustellen. Setzen wir zunächst:

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} \cos(\xi X_h) = y_h, \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \frac{1}{\tau},$$

so geht die Gleichung (c) über in:

$$(E) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 &= \tau_{11} y_1^2 + \tau_{22} y_2^2 + \tau_{33} y_3^2 + (\tau_{23} + \tau_{32}) y_2 y_3 \\ &\quad + (\tau_{31} + \tau_{13}) y_3 y_1 + (\tau_{12} + \tau_{21}) y_1 y_2. \end{aligned} \right.$$

Andererseits erhalten wir durch die Substitution:

$$\sqrt{\tau} \cos(\xi X_h) = z_h, \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \tau$$

den Ausdruck:

$$(F) \quad (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^2 = \sum_{h,k=1}^3 \tau_{hk} z_h z_k.$$

Betrachten wir nun  $y_1, y_2, y_3$  und  $z_1, z_2, z_3$  als Punktkoordinaten in dem Coordinatensystem  $X_1, X_2, X_3$ , so bedeutet (E) die Gleichung eines Ellipsoids und (F) die Gleichung eines Ovaloids. Der gemeinsame Mittelpunkt ist der Anfangspunkt  $O$ . Auf einer von  $O$  ausgehenden Geraden schneidet das Ellipsoid die Strecke  $1/\sqrt{\tau}$  und das Ovaloid die Strecke  $\sqrt{\tau}$  ab. (F) ist die inverse Fläche von (E).

Wählen wir jetzt zu Coordinatenachsen die in ihren Richtungen übereinstimmenden Hauptaxen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  der beiden Oberflächen, so gehen die Gleichungen derselben über in:

$$(E) \quad 1 = t_1 y_1^2 + t_2 y_2^2 + t_3 y_3^2,$$

$$(F) \quad (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)^2 = t_1 \delta_1^2 + t_2 \delta_2^2 + t_3 \delta_3^2,$$

wenn mit  $1/\sqrt{t_h}$  die Halbaxen des Ellipsoids und mit  $\sqrt{t_h}$ , ( $h = 1, 2, 3$ ), die Halbaxen des Ovaloids bezeichnet werden.

Die thermoelectrische Kraft  $\tau$  in der Richtung des stärksten Temperaturgefälles  $\xi$  wird repräsentirt in dem Ellipsoid (E) durch den reciproken Werth des Quadrates des zu  $\xi$  parallelen Radiusvector und in dem Ovaloid (F) durch das Quadrat des zu  $\xi$  parallelen Radiusvector.

Göttingen, im October 1889.



VIII. *Ueber Stösse und Stosstöne zweier in demselben Körper erregten Schwingungsbewegungen; von Dr. Rudolph König in Paris.*

Bei meinen früheren Untersuchungen über den Zusammenklang zweier Töne<sup>1)</sup> hatte ich immer nur Töne angewendet, welche durch gesonderte und von einander isolirte Tonquellen erzeugt wurden, und es blieb demnach noch der Fall zu beobachten übrig, in welchem die beiden primären Töne zugleich durch zwei verschiedene Schwingungsbewegungen in demselben Körper erregt werden.

Der Umstand, dass bei transversal schwingenden Stäben die Tonhöhe von der Breite unabhängig ist, macht, dass ein rechteckiger Stab für jeden Theilton gleicher Ordnung zwei verschiedene Töne ergibt, je nachdem er senkrecht zu seiner einen oder zu seiner anderen Querdimension schwingt, und dass es somit möglich ist, Stäbe für jedes beliebige Intervall herzustellen, wie dieses Wheatstone bei seinen Kaleidophonstäben in Anwendung gebracht hat. Die Schwingungen dieser Stäbe, welche die aus der Composition der beiden rechtwinkligen Schwingungsbewegungen entstehenden Figuren für das Auge darstellen sollen, müssen hierzu sehr grosse Amplituden haben, was sich nur bei sehr dünnen und an einem Ende befestigten Stäben erreichen lässt, deren Schwingungszahlen weit unter der tiefsten Grenze der hörbaren Töne liegen, und wünscht man bei ihnen das Intervall der beiden Töne auch durch das Ohr zu constatiren, so ist man genöthigt, in den beiden Schwingungsrichtungen zwei Theiltöne gleicher Ordnung einzeln nach einander mit dem Bogen zu erregen. Für meine Zwecke musste der vibrirende Körper natürlich gerade die entgegengesetzten Bedingungen erfüllen, nämlich durch seine beiden rechtwinkligen Schwingungsbewegungen gleichzeitig zwei möglichst starke Töne erzeugen, und daher wählte ich für meine Experimente dicke, an bei-

1) R. König, Pogg. Ann. 157. p. 177. 1876; Wied. Ann. 12. p. 335. 1881.

den Enden freie Stahlstäbe, welche mit den beiden Knotenstellen ihres tiefsten Transversaltones auf zwei Stegen ruhend, in beiden Transversalrichtungen zugleich erregt wurden.

Für die tiefen Töne der grossen Octave, an deren Intervallen sich die Stösse als solche, und ohne dass sie Töne bilden, beobachten lassen, war diese doppelte Erzeugung nicht ganz leicht zu erreichen. Beim Anstreichen der Kante eines langen Stabes mit dem Bogen in schräger Richtung entstand immer nur einer oder der andere der beiden Töne mit besonderer Stärke, und beim Anschlagen der Kante mit einem dicken Filzklöppel bildeten sich fast immer mehrere höhere Theiltöne, die wegen ihrer grossen Intensität sehr störend auftraten, wogegen sich in dem Stabe eine Schwingungsbewegung allein, durch Anschlagen einer seiner Flächen mit diesem Klöppel sehr wohl erzeugen liess, ohne dass derselbe Uebelstand dabei besonders fühlbar geworden wäre.

Ich fand es daher schliesslich am zweckmässigsten, eine gemischte Methode anzuwenden, nämlich erst den Stab vermittelst des Bogens in starke Horizontalschwingungen zu versetzen und dann durch einen Schlag auf seine Oberfläche auch noch die Verticalschwingungen zu erzeugen.

Ein Stab von ungefähr 1,210 m Länge, 0,03 m Breite, 0,018 m Dicke, auf diese Weise erregt, liess trotz der nicht unbedeutenden Amplituden der beiden Schwingungsbewegungen, doch nur zwei Töne von geringer Stärke hören, sodass man, um die aus ihrem Zusammenklange entstehenden Stösse leicht und deutlich zu vernehmen, das Ohr dem Stabe ziemlich nahe bringen musste, und es war daher bequemer, die Beobachtungen vermittelst eines ins Ohr eingesetzten Kautschukschlauches zu machen, mit dessen offenem Ende man immer leicht und schnell die hierfür passendste Stelle in der Nähe des Stabes finden konnte. Ueber der Mittellinie jeder Seitenfläche und in der ganzen Länge des Stabes liegt senkrecht eine Interferenzschicht der zu der betreffenden Fläche parallelen Schwingungsrichtung, sodass, wenn das offene Ende des Schlauches in diese hineinreicht, man nur den Ton allein hört, dessen Schwingungen zu dieser Fläche senkrecht sind, die passenden Beobachtungsstellen befinden sich also immer in der Mitte des Stabes zwischen diesen Inter-

ferenzstellen und je nach dem Intensitätsverhältnisse der beiden Töne mehr oder weniger in ihrer Mitte.

Machten die beiden Töne des Stabes von 1,210 m Länge 128 und 216 v. s. und bildeten somit ein etwas grösseres Intervall als die Sexta 3:5, so hörte man ein schnelles, aber einfaches Gerassel von Stössen, deren Anzahl, durch Hilfs- und Zwischengabeln bestimmt, sich als zwanzig ergab. Es waren also hier die oberen Stösse, welche allein vernommen wurden. Verringerte man die grössere Querdimension des Stabes bis seine beiden Töne das Intervall 8:12, mit 128 und 208 v. s. gaben, so wurde dass Stössegerassel verworren, was das Hinzutreten der unteren Stösse anzeigte, und blieb auch bei weiterer Verringerung des Intervalles verworren, bis ganz in der Nähe der Quinte ein bis zwei aus den unteren und oberen Stossreihen gebildete secundäre Stösse hervortraten.

Bei kurzen, dicken Stäben für die Hervorbringung der hohen Töne von  $c'''$  bis  $c''''$ , deren Intervalle für die Beobachtung der Stosstöne am günstigsten sind, findet nicht die geringste Schwierigkeit der doppelten Erregung statt, und es ist sogar auffällig, mit welcher Leichtigkeit und in wie weiten Grenzen die in einer Richtung erregte Schwingungsbewegung sich der anderen mittheilt, denn während die Töne zweier Körper nicht um mehr als eine Schwingung auf etwa 128 von einander verschieden sein dürfen, um sich noch einigermaassen gut gegenseitig influenziren zu können, hört man bei diesen Stäben, wenn sie stark und senkrecht auf eine ihrer Flächen mit einem Stahlhammer angeschlagen werden, immer mehr oder weniger laut auch den zweiten Ton auftreten. Will man jedoch beide Töne zugleich mit nahezu gleicher Stärke erregen, so muss man mit dem Hammer unter gleichem Winkel zu den beiden Seitenflächen auf eine ihrer Kanten schlagen, welche ich deshalb zweckmässig fand, zu einer schmalen Anschlagefläche abzustumpfen. Höhere Theiltöne treten bei diesen hohen Klangstäben neben den beiden Grundtönen gar nicht mehr auf, und dabei sind diese letzteren von sehr grosser Intensität, sodass denn auch Stäbe dieser Art von ungefähr 0,20 m Länge, welche für die Intervalle 8:9 bis 8:16 mit dem Grundtone  $c''' = 4096$  v. s. ge-

nau abgestimmt waren, die Stosstöne ausserordentlich laut und deutlich hören liessen.

Bei den Intervallen 8:9 und 4:5 trat der untere Stosston allein auf, 8:11 und 8:13 liessen die unteren und oberen Stosstönen 3 und 5, 5 und 3 zugleich hören, ebenso 4:7 den unteren Stosston 3 und den oberen 1. Bei der Quinte 2:3, wo der untere und obere Stosston zusammenfallen, erklang der somit doppelt erzeugte Ton 1 ausserordentlich stark und verstimmte man das Intervall der primären Töne dadurch, dass man auf eine Fläche des Stabes gegen die beiden Enden hin etwas Wachs klebte, so konnte man die aus den beiden nun nicht mehr genau zusammenfallenden Stosstönen gebildeten secundären Stösse hören, welche am deutlichsten waren, wenn ihre Anzahl ungefähr zwei in der Secunde betrug. Die Septime 8:15 liess allein den oberen Stosston 1 vernehmen und bei der um einige Schwingungen verstimmten Octave konnte man die oberen primären Stösse einzeln zählen.

Von den Intervallen der zweiten Periode, 1:2 bis 1:3, untersuchte ich nur die zwischen 1:2 und 4:9 liegenden, welche allein die unteren Stösse und Stosstöne dieser Periode beobachten liessen.

Das Resultat aller dieser Experimente war also, dass auch bei dem Zusammenklang zweier in demselben Körper erregten Töne das Gesetz sich bestätigt fand, welches die Erscheinungen beim Zusammenklang zweier durch gesonderte Tonquellen erzeugter Töne hatte erkennen lassen, und nach dem die Stösse und Stosstöne der Intervalle  $n:hn + m$ , wo  $h$  eine ganze Zahl und  $m$  kleiner als  $n$  ist, wenn  $m$  viel kleiner als  $n/2$ , gleich  $m$ , wenn  $m$  viel grösser als  $n/2$ , gleich  $n - m$ , und wenn  $m$  sich  $n/2$  nähert, gleich  $n$  und  $n - m$  sind.

Bei der Construction der Klangstäbe machte ich einige Bemerkungen, welche mit dem Hauptgegenstande meiner Untersuchungen zwar nichts zu thun hatten, vielleicht aber an und für sich nicht ohne Interesse sein dürften.

Der genauen Abstimmung aller im Vorhergehenden besprochenen Intervalle stehen keine Hindernisse entgegen, anders ist es jedoch beim Unisone, wo bei allen von mir

untersuchten Fällen sehr verwickelte Verhältnisse eintraten. Als ich bei vier Stäben, welche die Töne  $c''''$  und nahezu  $d''''$  gaben, den höheren Ton auch auf  $c''''$  zu stimmen versuchte, und zu diesem Zwecke die grössere Dimension mehr und mehr verringerte, sank der Stosston, welcher ursprünglich ungefähr  $c''$  gewesen war, zuerst ganz regelmässig. Er ging durch die eingestrichene, und dann durch die kleine Octave, ohne dass dabei etwas Besonderes zu bemerken gewesen wäre. In der grossen Octave wurde er aber dann mehr und mehr von einem sehr starken und verworrenen Stössegerassel begleitet, und war er ungefähr bis  $F$  oder  $E$ , also bis auf einige vierzig Doppelschwingungen gesunken, so fing er wieder an zu steigen, statt noch tiefer zu werden, sich dann in Stösse aufzulösen und schliesslich ganz zu verschwinden, wie man dieses hätte erwarten sollen. Es mussten also entweder die beiden den Stosston bildenden Töne sich nicht regelmässig mehr und mehr einander genähert haben, oder der Stosston, dessen Tonhöhe stieg, war von anderen Tönen gebildet worden, als der, welchen man anfänglich tiefer und tiefer werden hörte.

Das sehr starke und verworrene Stössegerassel, welches den Stosston begleitete, schien anzuzeigen, dass der Stab mehrere, dem Unisono nahe Töne zugleich hervorbrachte, und bei einer genauen Analyse der ganzen Tonmasse vermittelst Hilfsstimmgabeln fand ich bei einem Stabe mit dem Stosstone von nahezu  $G$ , neben den beiden sehr starken Tönen von 3998 und 4096 *v. d.*, noch einen starken Ton von 3950 und einen etwas schwächeren von 4045 *v. d.*, also zwei Tonpaare, in denen beiden ein sehr starker Ton von einem schwächeren und ungefähr um 48 bis 50 *v. d.* tieferen begleitet war. Ein anderer Stab mit dem Stosstone von 94 *v. d.* liess in seiner Tonmasse neben den beiden sehr starken Tönen von 4002 und 4096 *v. d.* noch einen ziemlich starken Ton von 3956 und einen sehr schwachen von 4048 *v. d.* wahrnehmen, sodass der Abstand der beiden Töne in jedem Tonpaare von 46 bis 48 *v. d.* also auch hier wieder ziemlich derselbe war, wie in den Tonpaaren des ersten Stabes.

Würden bei einer fortgesetzten Verringerung der ursprünglich grösseren Querdimension dieser Stäbe ihre Stoss-

töne bis auf 48 oder 50 *v. d.* gesunken und dann wieder gestiegen sein, so hätte die Existenz ihrer beiden Tonpaare diesen Vorgang vollständig erklären können, denn in der That, wäre das höhere Tonpaar, *b*, bis zum Unisone des tieferen, *a*, gesunken, so würde ein Stosston von 46 bis 48 *v. d.* mehrfach durch die höheren und tieferen Töne beider Tonpaare, *a* und *b*, entstanden sein, und wäre das Tonpaar *b* hierauf noch tiefer geworden, so hätte der Stosston des höheren Tones von *a* mit dem tieferen von *b* dann höher werden müssen. Das Experiment ergab jedoch, dass diese Tonpaare bei den beobachteten Erscheinungen nur das verworrene Stössegerassel bewirkt, dass das aufeinander folgende Sinken und Steigen des Stosstones aber durch die eigenthümlichen Veränderungen beider stärksten Töne während der fortgesetzten Verringerung ein und derselben Querdimension des Stabes entsteht, wie folgende Tabelle zeigt, in welcher die beiden stärksten Töne und der Stosston angegeben sind, die man an einem Stabe, dessen eine Querdimension fünfmal, und an einem anderen, dessen eine Dimension dreimal verringert wurde, nach jeder dieser Verringerungen beobachten konnte.

## I.

| 4002 — 4096 <i>v. d.</i> | Stosston 94 <i>v. d.</i> |
|--------------------------|--------------------------|
| 3990 — 4068 "            | " 78 "                   |
| 3974 — 4056 "            | " 82 "                   |
| 3955 — 4065 "            | " 110 "                  |
| 3948 —                   | " 154 "                  |

## II.

|               |        |
|---------------|--------|
| 3930 — 4022 " | " 92 " |
| 3926 — 4008 " | " 82 " |
| 3907 — 3998 " | " 91 " |

Eine kleine Unregelmässigkeit in der Bildung der beiden Töne hätte bei diesen Stäben vielleicht schon dadurch bewirkt werden können, dass die eine der beiden Kanten, welche bei der Verringerung der einen Dimension unberührt blieben, zu einer schmalen Anschlagfläche abgestumpft war; die gefundenen Schwingungszahlen stimmen aber so wenig weder mit dem Gesetze überein, nach welchem bei den Transversalschwingungen der Stäbe die Breite ohne Einfluss auf die Tonhöhe sein soll, noch mit dem, nach welchem bei diesen

Schwingungen die Tonhöhe in umgekehrten Verhältniss zu der Dicke der Stäbe steht, dass hier eigenthümliche Rückwirkungen der beiden oder vielmehr der vier Schwingungsbewegungen aufeinander stattfinden müssen, welche ganz aufzuklären aber noch weitere Untersuchungen nöthig sein würden.

Das Auftreten zweier Tonpaare in einem fast quadratischen Stabe dürfte sich dagegen wohl durch die weder zu den Seiten, noch zu den Diagonalen des Durchschnittes parallele Richtung der beiden Elasticitätsaxen erklären lassen, denn es scheint in der That, dass die schräge Neigung der Elasticitätsaxen zu den Seiten eines schwingenden Körpers diesem die Fähigkeit ertheilt, zwei verschiedene Theiltöne gleicher Ordnung in derselben Schwingungsrichtung hervorbringen zu können, wie sich dieses an schmalen Brettchen von Tannenholz beobachten lässt. Erzeugt man in einem solchen, in welchem die Fibern in der Längenrichtung laufen, den tiefsten Transversalton, so entsprechen diesem bekanntlich zwei scharf gezeichnete transversale Knotenlinien, und man erhält auch ebenfalls wieder zwei gleiche, wenn auch gewöhnlich etwas weniger scharf gezeichnete Linien, wenn die Holzfasern zur Längenrichtung rechtwinklig liegen. Bei Brettchen aber, in denen die Fasern um  $45^\circ$  zur Längenrichtung geneigt waren, entstand zuerst, und am leichtesten, ein Transversalton mit zwei zu einander fast parallelen Knotenlinien, deren Neigung zwischen die der Fasern und die Breitenrichtung fiel, dann liess sich aber auch noch in denselben ein anderer, etwas tieferer Ton ebenfalls mit nur zwei Transversallinien erregen, von denen die eine eine entgegengesetzte Richtung und geringere Neigung, die andere eine gleiche Richtung und grössere Neigung als die Fasern zur Längenrichtung hatte. Diese beiden Linien waren gekrümmt und konnten ihre Plätze vertauschen, ohne dass der Ton sich dabei veränderte. In beiden Lagen schnitten sie die beiden Parallellinien des höheren Tones nahezu in demselben Punkte. Diese beiden Schnittpunkte von je drei Linien stehen jedoch nicht ausnahmslos gleich weit von den Enden der Brettchen ab, da die Elasticität in der ganzen Länge derselben nicht immer gleich ist, und bei einem Brettchen



von 0,18 m Länge betrug der Unterschied zwischen beiden Abständen sogar 8 mm, obgleich die Holzfasern desselben dem Aussehen nach äusserst gleichförmig und regelmässig waren.

Bei einem Brettchen von 0,25 m Länge, 0,05 m Breite, 0,01 m Dicke, und bei Brettchen von 0,18 m Länge, 0,04 und 0,03 m Breite, 0,05 m Dicke, betrug der Unterschied in der Tonhöhe der beiden verschiedenen Töne fast einen Ton. Die Figur zeigt eines dieser beiden Brettchen mit den drei Paar Knotenlinien in viertel Grösse, und die Richtung der Holzfasern ist in derselben durch den Pfeil angegeben.



Schliesslich möchte ich noch erwähnen, dass auch bei den Kaleidophonstäben die beiden Schwingungsbewegungen fast nie so in Einklang gebracht werden können, dass die aus ihnen entstehende Ellipse fest und ohne Schwankungen bleibt, sondern verringert man mehr und mehr die ursprünglich etwas grössere Querdimension, so verlangsamt sich die Drehung der Ellipse nur bis zu einem gewissen Grade, und wird darauf wieder schneller, ebenso wie bei den Klangstäben der Stosston nur bis zu einer gewissen Tiefe sank, um dann wieder zu steigen.

Paris, im Januar 1830.

**IX. Ueber Klänge mit ungleichförmigen Wellen;  
von Dr. Rudolph König in Paris.**

In einer früheren Abhandlung, welche ich unter dem Titel „Bemerkungen über die Klangfarbe“ veröffentlicht<sup>1)</sup>, habe ich bewiesen, dass die Phasendifferenz der einen Grundton begleitenden Töne keineswegs ohne Einfluss auf die Klangfarbe sei, wie man bis dahin angenommen hatte, sondern sogar recht bedeutende Aenderungen in derselben bewirken könne. Ich zeigte, dass die Existenz der Stösse bei getrübbten harmonischen Intervallen schon allein hinreichte, um zu beweisen, dass ein solcher Einfluss der Phasendifferenz auf die Klangfarbe nothwendigerweise bestehen müsse; und verschiedene Experimente mit der Wellensirene, deren Resultate ausnahmslos darin übereinstimmten, dass sie diesen Einfluss sehr deutlich erkennen liessen, hatten also hauptsächlich nur den Zweck gehabt, die Grösse dieses Einflusses zur Wahrnehmung zu bringen. Hiernach musste somit die Klangfarbe als von der Anzahl der relativen Intensität und der Phasendifferenz der den Grundton begleitenden harmonischen Töne abhängig erklärt werden, und ein noch anderes Element, welches auf dieselbe einwirken könnte, lässt sich auch nicht denken, so lange man mit Klängen zu thun hat, die nur durch gleichförmige Wellen hervorgerufen werden. Man kann nun aber die Frage aufwerfen, ob zur Erzeugung eines Klanges es wirklich durchaus nothwendig sei, dass die aufeinander folgenden Wellen alle eine durchaus gleiche Form besitzen, oder ob nicht vielleicht gewisse Veränderungen oder Umwandlungen dieser Form eintreten können, ohne dass dadurch die einheitliche Empfindung des Klanges aufgehoben wird.

Diese Frage gewinnt besonders dadurch an Wichtigkeit, dass die Theiltöne der tönenden Körper, d. h. die Töne, welche diese Körper einzeln hervorzubringen im Stande sind, indem sie mit verschiedenen Unterabtheilungen schwingen, in Wirklichkeit nie ihren theoretischen Werthen genau entsprechen, sondern sich diesen Werthen immer nur mehr oder weniger nähern, wie ich dieses auch schon in der oben erwähnten

1) R. König, Wied. Ann. 14. p. 369. 1881.



Fig. 2a.



Fig. 1.



Fig. 2.

Abhandlung angegeben und an den verschiedenen tönenden Körpern nachgewiesen habe. Wenn also ein solcher Körper neben seinem Grundton mehrere seiner Theiltöne zugleich ertönen lässt, so werden dadurch Wellen hervorgerufen, welche wegen der beständigen Phasenverschiebung dieser Theiltöne einem beständigen Formenwechsel unterworfen sind, und dieser Fall tritt bei den musikalischen Instrumenten um so häufiger ein, als bei den wichtigsten derselben hauptsächlich die Schwingungen der Saiten und die der Luftsäulen zur Anwendung kommen, also gerade derjenigen tönenden Körper, welche mit ganz besonderer Leichtigkeit Theiltöne bilden, und mehrere derselben zugleich hervorbringen können. Man erhält daher auch bei der Aufzeichnung der Bewegung einzelner Punkte der gestrichenen Saiten sehr häufig, und der angeschlagenen wohl sogar immer, Curvenreihen von beständig wechselnder Form, und zwar keineswegs nur bei beträchtlich langen, wenig gespannten Saiten, deren Grundton sehr tief ist, also etwa den Saiten der tiefsten Töne des Claviers, sondern auch bei Saiten, deren Grundtöne den mittleren und höheren Lagen entsprechen. So zeigt z. B. die Curvenreihe Fig. 1, die den Tonschriften entnommen ist, welche die Abhandlung von Cl. Neumann „Ueber die Schwingungen gestrichener Saiten“<sup>1)</sup> begleiten, die Bewegung eines Punktes einer gestrichenen Saite, und Fig. 2 zwei Tonschriften

1) Cl. Neumann, Wien. Ber. 20. Jan. 1870.

einer nur 0,50 m langen und auf *c'* gestimmten Stahlsaiten, welche mittelst eines kleinen Korkhammers angeschlagen wurde. Die Saiten der tiefsten Töne des Claviers würden nicht nur wegen ihres wenig ausgebildeten musikalischen Charakters ein unzweckmässig gewähltes Beispiel abgeben, sondern auch darum, weil die Ueberspinnung derselben mit Kupferdraht nicht ihre ganze Länge einnimmt, und sie also nicht als gewöhnliche einfache Saiten betrachtet werden können.

Von Körpern mit ganz unharmonischen Theiltönen sollte man erwarten, dass sie vollständig unfähig sein müssten Klänge mittelst dieser zu bilden, und doch hat der Sprachgebrauch den Glocken gewöhnlich einen Klang zuerkannt. Es ist wahrscheinlich die sehr grosse Anzahl der durch das Aufschlagen des Klöppels zugleich erregten Töne, und die sehr beträchtlich grössere Intensität eines derselben, welche es schwer macht, das ganze Tongemisch zu entwirren, und dieses wie einen Klang von der Tonhöhe des Tones grösster Intensität auffassen lässt, wenigstens während einer kurzen Zeit nach dem Anschlagen, denn beim Ausklingen der Glocken verschwinden ihre höheren Töne schneller, als die tieferen, sodass zuletzt nur noch ihr Grundton gehört wird, welcher aber nicht der Ton stärkster Intensität der Glocke zu sein pflegt, nach dem ihre Tonhöhe angegeben wird, wie bekanntlich Lord Rayleigh an fünf Glocken hat constatiren können.

Würde das Ohr, wenn nicht ganz rein harmonische oder auch ganz unharmonische Töne einen starken Grundton begleiten, diese immer aus dem Tongemische einzeln heraus hören, andererseits aber rein harmonische Töne stets mit ihrem Grundtone zu einer einheitlichen Empfindung verschmelzen, so möchte damit eine scharfe Grenze zwischen Zusammenklängen und Klangfarben gezogen sein, und Untersuchungen über die Zusammenklänge könnten dann von dem Studium der Klangfarbe ausgeschlossen bleiben; da jedoch beides nicht der Fall ist und geübte Ohren ebenso wohl häufig harmonische Töne aus einem Klange einzeln heraus hören können, wie es ihnen andererseits oft unmöglich ist, Zusammenklänge unharmonischer Töne zu entwirren, so habe ich eine Reihe Versuche über das Verhalten und die Wirkung unrein harmonischer und auch unharmonischer, einen

starken Grundton begleitender Töne angestellt, um zu sehen, ob sich nicht wenigstens einige feste Anhaltspunkte darüber gewinnen liessen, obgleich die Resultate derartiger Untersuchungen natürlich in nicht geringem Grade von der musikalischen Ausbildung des beobachtenden Ohres abhängen müssen, und z.B. ein geübter Orchesterdirigent oft noch die einzelnen Töne aus einem Tongemische heraushören wird, welches weniger geübte Ohren schon wie einen durchaus einheitlichen Klang empfinden.

Ich machte diese Experimente mit Wellensirenenscheiben, welche nach demselben Princip construirt waren, das ich auch bei früheren Untersuchungen schon mehrfach angewendet, d. h. ich übertrug die einen einfachen Grundton darstellenden Sinuscurven auf die Peripherie eines Kreises und auf diese dann wieder die Sinuscurven derjenigen Töne, von welchen ich den Grundton wollte begleiten lassen; die so erhaltene Wellenlinie wurde dann am Rande einer Metallscheibe ausgeschnitten und durch eine schmale Windspalte angeblasen, während die Scheibe selbst auf einem Rotationsapparate in Umdrehung versetzt war.

In einer ersten Versuchsreihe untersuchte ich den Fall, in welchem ein Grundton von unrein harmonischen Tönen begleitet ist, und welcher also besonders oft bei denjenigen tönenden Körpern eintreten muss, deren Theiltöne der Theorie nach der Reihe der harmonischen Töne angehören.



Fig. 3.

Bei der ersten Scheibe (Fig. 3) hatte ich auf 24 den Grundton darstellende Sinuscurven, die Sinuscurven der Töne  $2.24 + 1$ ,  $3.24 + 3$ ,  $4.24 + 5$ ,  $5.24 + 7$ , übertragen und bei allen dasselbe Verhältniss zwischen der Länge und der Höhe wie beim Grundton beibehalten. Wie zu erwarten stand, ergab das Experiment, dass man die Tonmasse in diesem Falle sehr deutlich als aus einzelnen Tönen zusammengesetzt vernimmt, ob-

gleich bei der Beobachtung der Umstand sehr stört, dass die Reihe von 24 Grundwellen von sehr verschiedener Form zu

kurz ist, um nicht als Periode aufzutreten, welche bei jedem Umlaufe der Scheibe wie eine Schwebung wirkt, was dem Tongemische also einen intermittirenden Charakter gibt.

Beim Anblick dieser Scheibe dürfte man kaum geneigt sein, zu glauben, dass Schwingungen von so verschiedener Form wie diese von einem tönenden Körper sollten ausgeführt werden können, und doch wird man bemerken, dass ein Theil der in Fig. 1 gegebenen Tonschrift einer gestrichenen *e'*-Saite gerade eine auffallende Aehnlichkeit mit den Wellencurven auf der einen Hälfte dieser Scheibe zeigt.

Für die Construction der zweiten Scheibe (Fig. 4) hatte ich dieselben Wellenzahlen benutzt, die Höhe der Wellen im Verhältniss zu ihrer Länge aber für jeden höheren Ton verhältnissmässig abnehmen lassen. Hier nahm nun schon das Tongemisch weit mehr den Charakter eines Klanges an, wenn derselbe auch intermittirend war, da der Uebelstand der zu kurzen Periode im Verhältniss zu dem sehr beträchtlichen Wechsel der Wellenform auch bei diesem Experimente wie beim ersten stattfand.



Fig. 4.



Fig. 5.

Die Wellenreihen der dritten Scheibe (Fig. 5) waren 24, 6.24+6, 7.24+8, 8.24+12 und beim Anblasen hörte man den Grundton und die höhere Tonmasse, welche durch die drei hohen Töne zusammen gebildet wurde, gesondert. Der Abstand zwischen dem tiefen Grundtone und diesen hohen Tönen war hier offenbar zu gross, um eine Verschmelzung zu gestatten,

und es galt nun also, diese Kluft auszufüllen. Dies lässt sich schon mit derselben Scheibe ausführen, da der einfache Ton, welcher entsteht, wenn man Sinuscurven durch eine zu ihrer Fortpflanzungsrichtung senkrechten Spalte anbläst, sofort in einen Klang mit starken harmonischen Tönen übergeht, deren Intensität nach der Höhe zu regelmässig abnimmt und deren Phasendifferenz, wenn die Spalte in der Richtung der Rotationsbewegung der Scheibe geneigt ist, 0 beträgt und im entgegengesetzten Falle  $\frac{1}{2}$ . Neigt man nun also die anblasende Spalte vor der Wellencurve der rotirenden Scheibe in der einen oder der anderen Richtung und verwandelt somit den einzelnen Grundton in eine Reihe harmonischer Töne, so verschmelzen für mein Ohr die drei den harmonischen Tönen 6, 7, 8 nahen Töne vollständig mit diesem Klange.

Auf einer vierten Scheibe (Fig. 6) hatte ich die Kluft, welche zwischen dem Grundtone und den drei unrein harmonischen Tönen 6, 7, 8 auf der dritten Scheibe bestand, direct ausgefüllt, indem ich die Sinuscurven dieser drei hohen Töne statt auf 24 Sinuscurven auf 24 Wellencurven übertrug, welche aus den ersten fünf rein harmonischen Tönen gebildet waren, und das Tongemisch, welches ich beim Anblasen derselben erhielt, hatte dann wieder durchaus den Charakter eines Klanges, und zwar bei allen Stellungen der Windspalte. Steht diese senkrecht



Fig. 6.

zur Fortpflanzungsrichtung, so ist der Klang scharf und wird noch schärfer, wenn man sie etwas in der den Curvengipfeln entgegengesetzten Richtung neigt, bis die Spitzen der Curven früher als ihre anderen Theile vor die Spalte treten; der Klang wird weniger scharf und runder bei der Neigung der Spalte in der Richtung der Curvengipfel, wie sich erwarten liess.

Aus allen diesen Versuchen scheint also hervorzugehen, dass das Ohr ein Tongemisch, welches aus einem Grundton



und einer Reihe nach der Höhe zu mehr und mehr bestimmter harmonischer Töne besteht, sehr wohl als einen Klang empfinden kann, und dieses um so leichter thut, als diese Töne eine vollständigere Reihe bilden und ihre Intensitäten sich einer regelmässigen Abnahme nach der Höhe zu nähern. Befinden sich dagegen in der Reihe grosse Lücken oder haben einzelne dieser Töne eine beträchtlich grössere Intensität als die anderen, so verliert das Tongemisch dadurch mehr oder weniger seinen einheitlichen Charakter.

Das Zusammenwirken der unrein harmonischen Töne ist sicherlich wohl auch die hauptsächlichste Ursache der sehr scharfen und schmetternden Klänge solcher Instrumente, wie z. B. der Trompeten, welche sich durch den Zusammenklang rein harmonischer Töne weit schwerer dürften erklären lassen, denn wenn auch die Intervalle zwischen zwei aufeinanderfolgenden harmonischen Tönen nach der Höhe zu kleiner und kleiner werden, so bleibt doch ihr Abstand von einander in Schwingungszahlen immer derselbe und stets gleich der Schwingungszahl des Grundtones, wenn aber z. B. bei einem Trompetenton  $c'$  dieser Abstand immer 256 v. d. beträgt, so können dabei durchaus keine Stösse von merklicher Wirkung und folglich auch keine scharfen Rauigkeiten entstehen. Ganz anders verhält sich die Sache aber, wenn die Theiltöne zu den unrein harmonischen gehören, denn in diesem Falle geben erstens alle mit dem Grundtone primäre Stösse, und zwar jeder von ihnen eine andere Anzahl, dann aber müssen diese unrein harmonischen Töne auch unter sich zahlreiche und starke secundäre Stösse erzeugen, d. h. Stösse, welche durch den Zusammenklang der von ihnen gebildeten Stosstöne entstehen und diese tragen wahrscheinlich sogar noch mehr dazu bei, ein vielfältiges Gerassel hervorzubringen und somit den Klang scharf und schmetternd zu machen, als die ersteren.

Weit weniger häufig als der bisher untersuchte, dürfte in der Wirklichkeit der Fall vorkommen, in welchem gleich lange Wellen von verschiedener Form aufeinanderfolgen, die nicht aus dem Zusammenklange unrein harmonischer oder auch ganz unharmonischer Töne mit dem Grundton entstanden sind.

Blies ich eine Reihe von Wellen an, welche alle denselben Grundton enthielten, bei denen aber die Zahl, Inten-



sität und Phasendifferenz der harmonischen Töne beständig in einer Weise wechselten, dass dadurch sehr verschiedene Formen entstanden waren, die weder gleiche Amplituden, noch auch isochrone Maxima der Verdichtung und Verdünnung darstellten (Fig. 7), so hörte man den Grundton begleitet von einem sehr starken Rasseln, in welchem auch noch einige Töne schwach vernehmbar waren, was alles zusammen jedoch in keiner Weise einen musikalischen Klang bildete.



Fig. 7.

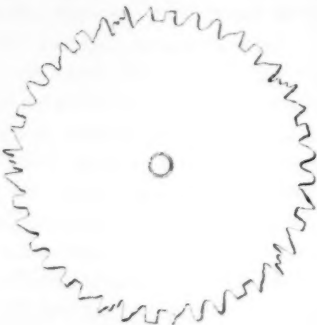


Fig. 8.

Wiederholte sich in einem anderen Wellenzuge nur eine kleine Anzahl solcher Wellen periodisch (Fig. 8), so wirkten diese Perioden wie einzelne Tonimpulse, welche bei geringerer Anzahl wie Stösse, bei grösserer aber als Ton neben dem Grundtone von dem starken Gerassel begleitet, gehört wurden, was aber auch wieder noch keinen musikalischen Klang gab.

Durchaus andere Resultate erhält man aber mit Wellen, deren Formenwechsel der Art ist, dass sie bei demselben nicht aufhören, gleiche oder doch wenigstens nahezu gleiche Schwingungsweiten und isochrone Maxima der Compression und Dilatation darzustellen. Wurde eine Reihe kleiner unregelmässiger Wellen auf die Sinuscurven des Grundtones übertragen (Fig. 9), welche den Kräuselungen vergleichbar waren, die man über grosse Wasserwellen laufen sieht, ohne dass sie die Grundform derselben wesentlich modificiren, so rief sie keine vom Grundtone gesonderte Empfindung hervor und verschmolz vielmehr mit diesem vollständig, sowohl wenn derselbe beim Anblasen mit senkrechter Windspalte nur allein existirte, wie auch wenn er bei geneigter Windspalte von harmonischen Tönen begleitet war.

Eine andere Folge von Wellen sehr verschiedener Form, welche ich dadurch erhalten, dass ich von einer Reihe Sinus-curven nur die äussersten Gipfel und Thaltiefen unverändert gelassen, die zwischenliegenden Stücke aber sehr beträchtlich ganz nach Willkür und auf jeder Welle in anderer Art verändert hatte (Fig. 10), liess ebenfalls einen Klang hören, dem auch in allen seinen Abänderungen, welche man durch die verschiedenen Stellungen der Windspalte bewirken konnte, in keiner Weise der musikalische Charakter fehlte.



Fig. 9.



Fig. 10.

Die Versuche dieser zweiten Reihe zeigen also, dass kleine Unregelmässigkeiten, welche nicht wesentlich die Grundform der Wellen verändern, die Bildung eines Klanges nicht hindern, und dass auch gleich lange Wellen von selbst sehr verschiedener Form einen Klang erzeugen können, wenn nur ihre Amplituden sich immer ziemlich gleich bleiben und die Maxima ihrer Verdichtungen und Verdünnungen isochrone Reihen bilden, wobei es jedoch nicht nöthig ist, dass die einen gerade in die Mitte der anderen fallen.

Bei allen diesen Klängen, welche durch verschieden geformte Wellen erzeugt werden, haben alle Wellen stets den gleichen Grundton; die harmonischen Töne, in welche sich jede einzelne dieser Wellen zerlegen lässt, gehören somit immer alle derselben Reihe an, und wollte man also auch diese Klänge als allein aus Grundton und harmonischen Tönen entstanden erklären, so müsste man sagen, dass bei ihnen die den Grundton begleitenden harmonischen Töne ihre relative Intensität und ihre Phasendifferenz von Welle zu Welle verändern.

Paris, Januar 1890.

**X. Bestimmung der Elasticitätsconstanten  
für Kalkspath. Unter Benutzung der Biegungs-  
beobachtungen von G. Baumgarten;  
von W. Voigt.**

(Im Auszug aus den Nachr. v. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1889,  
Nr. 19 mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Der Kalkspath ist zuerst von allen Krystallen auf seine Elasticitätsverhältnisse hin untersucht worden; die Beobachtungen der Biegungen prismatischer Stäbchen durch G. Baumgarten<sup>1)</sup> haben die Abhängigkeit seines Elasticitätscoefficienten oder, wie wir präziser sagen, seines Dehnungswiderstandes von der Richtung klargestellt und die überraschende Grösse seiner Aenderung gezeigt.

Absolute Werthe für diese Coefficienten konnten jene Beobachtungen aber besonders deshalb nicht liefern, weil die Stäbchen, welche Baumgarten damals unter grossen Schwierigkeiten selbst anfertigen musste, derjenigen feinen Politur entbehrten, welche allein die sichere Bestimmung ihrer Dimensionen gestattet. Bei dem enormen Einfluss, den namentlich die Dicke der Prismen bei der Berechnung des Dehnungswiderstandes übt, musste diese Unsicherheit in den absoluten Werthen grosse Fehler verursachen, während sie das Gesetz ihrer Aenderung mit der Richtung weniger betraf, da hier nicht der absolute Werth des Fehlers in der Dickebestimmung, sondern nur seine Aenderung von Stäbchen zu Stäbchen wirksam ist.

Nachdem in dem optischen Institut von Hrn. Dr. Steeg und Reuter in Homburg, das seinerzeit jene erste Arbeit nicht übernehmen wollte, Vorkehrungen getroffen sind, um die für die elastischen Beobachtungen nöthigen Prismen herzustellen, bietet die vollständige Bestimmung der Elasticitätsconstanten und damit der absoluten Werthe der Dehnungs- und Drillungswiderstände für Kalkspath weniger Schwierigkeiten, als für die meisten anderen Krystalle, weil von ihm

1) G. Baumgarten, Pogg. Ann. 152. p. 369. 1874.

das nöthige Beobachtungsmaterial leicht in höchster Vollkommenheit zu beschaffen und die genannte Werkstatt überdies in seiner Bearbeitung ganz besonders erfahren ist.

In die Beobachtungen haben wir uns in der Weise getheilt, dass Baumgarten die Messung der Biegungen, ich diejenige der Dimensionen und der Drillungen übernahm; bei der Bestimmung der Dimensionen hat mir, wie schon früher Hr. Dr. Drude treulich geholfen.

Schliesslich habe auch ich die Biegungen eines grossen Theiles der Stäbchen gemessen, weil es von Interesse schien, zu constatiren, in wie weit unsere beiden Apparate bei demselben Material übereinstimmende Resultate ergäben.

#### Formeln für das rhomboëdrische System.

Die für die Berechnung der Beobachtungen zu benutzenden Gleichungen sind ausführlich an anderen Orten<sup>1)</sup> entwickelt; es genügt demnach hier die Zusammenstellung der wichtigsten Resultate.

Das Spaltungsrhomboëder sei so aufgestellt, dass die  $Z$ -Axe in die Hauptaxe, die  $YZ$ -Ebene in eine krystallographische Symmetrieebene fällt und die  $+Y$ -Axe aus einer der um die  $+Z$ -Axe herumliegenden Rhomboëderflächen austritt.

Das System der Elasticitätsconstanten sei dann bezeichnet durch das Schema:

|            | $x_x$    | $y_y$     | $z_z$    | $y_z$     | $z_x$    | $x_y$                          |
|------------|----------|-----------|----------|-----------|----------|--------------------------------|
| $-X_x$     | $c_{11}$ | $c_{12}$  | $c_{13}$ | $c_{14}$  | 0        | 0                              |
| $-F_y$     | $c_{12}$ | $c_{11}$  | $c_{13}$ | $-c_{14}$ | 0        | 0                              |
| (1) $-Z_z$ | $c_{13}$ | $c_{13}$  | $c_{33}$ | 0         | 0        | 0                              |
| $-Y_z$     | $c_{14}$ | $-c_{14}$ | 0        | $c_{44}$  | 0        | 0                              |
| $-Z_x$     | 0        | 0         | 0        | 0         | $c_{44}$ | $c_{14}$                       |
| $-X_y$     | 0        | 0         | 0        | 0         | $c_{14}$ | $\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$ |

seine Determinante heisse  $S$ , und in ihr der Coefficient des  $k$ ten Elementes in der  $k$ ten Columnne  $S_{hk}$ ; wir setzen:

$$(2) \quad S_{hk}/S = s_{hk}.$$

Dann gilt:

$$(3) \quad \begin{cases} s_{11} = s_{22}, & s_{13} = s_{23}, & s_{44} = s_{55}, & s_{66} = 2(s_{11} - s_{13}), \\ & s_{14} = -s_{24} = \frac{1}{2}s_{56}; \end{cases}$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. 31. p. 495. 1887; 36. p. 743. 1889.

alle übrigen  $s_{ik}$  sind gleich Null. Als unabhängig behalten wir bei:

$$s_{11}, s_{33}, s_{44}, s_{12}, s_{13}, s_{14}.$$

Der *Dehnungscoefficient*  $E$  in einer durch die Richtungs-cosinus  $\alpha, \beta, \gamma$  gegen die Coordinatenaxen bestimmten Richtung hat dann den Werth:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} E = & s_{11}(1 - \gamma^2)^2 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{13})\gamma^2(1 - \gamma^2) \\ & + 2s_{14}\beta\gamma(3\alpha^2 - \beta^2). \end{aligned} \right.$$

Durch diesen Dehnungscoefficienten  $E$  bestimmt sich die Biegung  $\eta$  eines rechteckigen Prismas von den Dimensionen  $L, B, D$  durch ein in seiner Mitte angreifendes Gewicht  $P$  nach der Formel:

$$(5) \quad \eta = E \frac{PL^3}{4BD^3}.$$

$1/E = E$  nennen wir den *Dehnungs- oder Biegungswiderstand*;  $E$  ist identisch mit dem sogenannten Elasticitätscoefficienten.

Der *Drillungscoefficient*  $T$  für ein durch die Richtungs-cosinus  $\alpha, \beta, \gamma$  seiner Längsaxe,  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  seiner grösseren,  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  seiner kleineren Querdimension nach seiner Orientirung gegebenes rechtwinkliges Prisma hat den Werth:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} T = & s_{44} + (2(s_{11} - s_{12}) - s_{44})\gamma_2^2 + 4(s_{11} + s_{33} - s_{44} - 2s_{13})\gamma^2\gamma_1^2 \\ & + 4s_{14}[(\gamma\beta_1 + \beta\gamma_1)(3\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1) - \beta_2\gamma_2]. \end{aligned} \right.$$

Mit diesem Coefficienten ist der Drillungswinkel  $\tau$  des Prismas aber allgemein nur dann proportional, wenn die kleinere Querdimension neben der grösseren vernachlässigt werden kann; im anderen Falle ist nur das massgebende Glied in dem dafür geltenden Ausdruck in ihn multiplicirt. Eine Vereinfachung tritt ein, wenn die Längsaxe des Prismas eine geradzählige krystallographische Symmetrieaxe und daher normal zu einer elastischen Symmetrieebene ist. Dann gilt:

$$(7) \quad \tau = T \frac{3NL}{D^3B \left(1 + \frac{D}{B}f\right)},$$

worin  $N$  das ausgeübte Moment um die Längsaxe bezeichnet und  $f$  eine Function der Orientirung des Prismas ist, für welche sich ein angenäherter Werth leicht erhalten lässt. Es gilt nämlich:

$$(8) \quad f = -\frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{s_{44}' s_{55}' - s_{45}'^2}}{s_{55}'} \left( 1 + 0,510 \frac{s_{45}'^2}{s_{44}' s_{55}' - s_{45}'^2} \right),$$

falls gesetzt wird:

$$(9) \quad \begin{cases} s_{44}' = s_{44} + (2(s_{11} - s_{12}) - s_{44}) \gamma_1^2 - 4s_{11} \gamma_1 \beta_1, \\ s_{55}' = s_{44} + (2(s_{11} - s_{12}) - s_{44}) \gamma_2^2 - 4s_{11} \gamma_2 \beta_2, \\ s_{45}' = s_{44} (\gamma_1 \gamma_2 + \beta_1 \beta_2) + 2s_{11} (\gamma_1 \beta_2 + \gamma_2 \beta_1). \end{cases}$$

In dem Ausdruck (4) für E kommen vier Aggregate der sechs  $s_{hk}$  vor, man kann diese also durch die Beobachtung der Biegung von vier Gattungen von Stäbchen bestimmen. Deren Orientirungen werden passend so gewählt, dass für sie E ein Maximum oder Minimum wird; denn dann sind die unvermeidlichen kleinen Fehler in der Orientirung ohne Einfluss. Man findet nun leicht, dass die Werthe:

$$\alpha = \beta = 0, \quad \gamma = 1$$

$$\text{und} \quad \alpha = 1, \quad \beta = \gamma = 0$$

$\delta E$  zu Null werden lassen; stets wird sich also die X- und die Z-Axe als Längsrichtung für je eine Gattung von Prismen empfehlen. Weitere Maximal- und Minimalrichtungen liegen in der YZ-Ebene; diese sind aber zahlenmässig erst angebbar, wenn die  $s_{hk}$  bestimmt sind. Nach den früheren Baumgarten'schen Beobachtungen war ein Minimum in ca.  $+70^\circ$ , ein Maximum in ca.  $-50^\circ$  Neigung gegen die Hauptaxe zu erwarten, wenn die Winkel in der Richtung nach der +Y-Axe hin positiv gerechnet werden. Demgemäss hatte ich auch bei Dr. Steeg und Reuter Stäbchen unter den Winkeln  $+70^\circ$ , resp.  $-50^\circ$  gegen die Hauptaxe in Arbeit gegeben. Indessen ist in der Werkstatt ein Versehen vorgekommen und die gelieferten Stäbchen entsprachen ungefähr den Winkeln  $-70^\circ$  und  $+50^\circ$ .

Hiermit ist natürlich der gewünschte Zweck vereitelt und es musste die Orientirung der beiden Gattungen Stäbchen genau nachgemessen werden; indessen ist gerade bei Kalkspath der Schaden verhältnissmässig gering, da die deutlichen Spaltungsflächen jene Messungen leicht und ziemlich genau mit dem Reflexionsgoniometer auszuführen gestatten.

Im übrigen sind die Stäbchen von Dr. Steeg und Reuter ausserordentlich schön gearbeitet und hochpolirt. Vor

der Messung der Dimensionen wurden sie mehrere Tage in Benzol aufbewahrt und dann tüchtig mit Leinen abgerieben, um die fest anhängenden Reste der Kitt- und Polirmasse zu entfernen.

Durch Drillungsbeobachtungen sind nur zwei Aggregate der  $s_{hk}$  zu bestimmen, und hierzu also nur zwei Gattungen von Stäbchen nöthig. Ich habe sie beide mit ihrer Längsaxe in die X-Richtung, d. h. die Normale zur krystallographischen Symmetrieebene, gelegt und bei der einen die kleinere Querdimension, bei der andern die grössere in die Z-Hauptaxe fallen lassen.

Die Bezeichnung der verschiedenen Gattungen Stäbchen wollen wir folgendermassen wählen.

Ein Stäbchen, dessen Längsaxe in der Symmetrieebene des Krystalles (I. Hauptschnitt) liegt, soll die Ziffer I, eines, dessen Längsaxe in der dazu normalen Ebene (II. Hauptschnitt) liegt, die Ziffer II beigelegt erhalten, wenn gleichzeitig die grössere Querdimension (Breite B) normal zur Z-Axe steht, hingegen die Ziffern I' und II'', wenn die kleinere Querdimension (Dicke D) normal zur Z-Axe steht; ausserdem soll eine hinzugefügte Zahl abgerundet die Anzahl Grade des Winkels zwischen Längsrichtung des Stäbchens und Z-Axe angeben.

Es entsprechen sich also folgende Bezeichnungen und Richtungs cosinus:

|                 |  |
|-----------------|--|
| I(0°) u. II(0°) | $\alpha = \beta = 0, \gamma = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = 0,$                     |
| I(+70°)         | $\alpha = 0, \beta = +\sin(70^\circ), \gamma = +\cos(70^\circ), \gamma_1 = 0,$ |
| I(-50°)         | $\alpha = 0, \beta = -\sin(50^\circ), \gamma = +\cos(50^\circ), \gamma_1 = 0,$ |
| II(90°)         | $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1,$                  |
| II'(90°)        | $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0, \gamma_2 = 0, \gamma_1 = 1.$                  |

Bei den Dehnungscoefficienten E genügt in den vorstehenden fünf Fällen zur Unterscheidung die Angabe des Neigungswinkels, falls man nur die Bezeichnung als auf den ersten Hauptschnitt bezogen denkt; denn E oder  $\bar{E}$  hat für die Gattungen II(90°), II'(90°) und I(90°) den gleichen Werth.

Wir erhalten sonach folgendes Tableau:

$$(10) \begin{cases} E_0 = s_{33}, E_{90} = s_{11}, \\ E_{-70} = s_{11} \sin^4(70^\circ) + s_{33} \cos^4(70^\circ) + (s_{44} + 2s_{13}) \sin^2(70^\circ) \cos^2(70^\circ) \\ \quad + 2s_{14} \sin^3(70^\circ) \cos(70^\circ), \\ E_{+50} = s_{11} \sin^4(50^\circ) + s_{33} \cos^4(50^\circ) + (s_{44} + 2s_{13}) \sin^2(50^\circ) \cos^2(50^\circ) \\ \quad + 2s_{14} \sin^3(50^\circ) \cos(50^\circ); \end{cases}$$

hierin sind statt der abgerundeten Zahlen  $50^\circ$  und  $70^\circ$  die weiter unten angegebenen genauen Werthe einzusetzen.

Die Drillungscoëfficienten für die Gattungen II ( $90^\circ$ ) und II' ( $90^\circ$ ) wollen wir mit  $T_{90}$  und  $T_{90}'$  bezeichnen, analog die in Formel (7) auftretende Function  $f$ , resp. mit  $f_{90}$  und  $f_{90}'$ .

Für die Gattung II ( $90^\circ$ ) gilt nach (6), (8) und (9):

$$s_{44}' = s_{44}, \quad s_{55}' = 2(s_{11} - s_{12}), \quad s_{45}' = 2s_{14},$$

also:

$$(11) \quad T_{90} = 2(s_{11} - s_{12}) \quad \text{und}$$

$$f_{90} = -\frac{2}{\pi} \frac{V 2s_{44}(s_{11} - s_{12}) - 4s_{14}^2}{2(s_{11} - s_{12})} \left( 1 + 0,510 \frac{4s_{14}^2}{2s_{44}(s_{11} - s_{12}) - 4s_{14}^2} \right);$$

für die Gattung II' ( $90^\circ$ ) ist:

$$s_{44}' = 2(s_{11} - s_{12}), \quad s_{55}' = s_{44}, \quad s_{45}' = 2s_{14},$$

also:

$$(12) \quad T_{90}' = s_{44} \quad \text{und}$$

$$f_{90}' = -\frac{2}{\pi} \frac{V 2s_{44}(s_{11} - s_{12}) - 4s_{14}^2}{s_{44}} \left( 1 + 0,510 \frac{4s_{14}^2}{2s_{44}(s_{11} - s_{12}) - 4s_{14}^2} \right).$$

Ausser diesen beiden Gattungen Stäbchen habe ich auch die Gattung I ( $0^\circ$ ) gedreht.

Da bei derselben die grössere Querdimension der  $X$ -Axe parallel liegt, wird für sie:

$$(13) \quad T_0 = s_{44};$$

die Formel (7) für  $\tau$  bleibt auch hier bestehen, aber  $f$  ist nicht mehr durch Rechnung bestimmbar. Bei Bergkrystall hatte die Combination gewisser Beobachtungen den Werth:

$$f_0 = -0,635$$

ergeben, der auffällig mit dem theoretisch bei unkrystallinischen Medien gefundenen  $f = -0,636$  übereinstimmt. Es war daher von Interesse zu untersuchen, ob bei Kalkspath die Benutzung dieses Werthes  $T_0$  wirklich zur Uebereinstimmung mit  $T_{90}'$  bringt.

Sind die sechs Constanten  $s_{hk}$  gefunden, so berechnet sich aus ihnen ausser den allgemeinen Werthen von  $E$  und  $T$



auch der Werth des Drillungscoefficienten  $T^0$  für einen Kreiscylinder, der nur von den Richtungscosinus  $\alpha, \beta, \gamma$  seiner Längsaxe gegen die Coordinatenaxen abhängt und der deshalb für die Discussion der Resultate besonders bequem ist; man erhält:

$$(14) \quad T^0 = s_{44} + 2(s_{11} - s_{12}) + (s_{44} - 2(s_{11} - s_{12})) \gamma^2 \\ + 4(s_{11} + s_{33} - s_{44} - 2s_{13}) \gamma^2(1 - \gamma^2) - 8s_{14}\beta\gamma(3\alpha^2 - \beta^2).$$

Ein beliebig gestaltetes Stück eines rhomboëdrischen Krystalles wird bei allseitig gleichem Druck so deformirt, dass die ihm entsprechenden lineären Compressionscoefficienten  $A_3$  und  $A_1$  parallel und normal der Hauptaxe die Werthe haben:

$$(15) \quad A_1 = s_{11} + s_{12} + s_{13}, \quad A_3 = 2s_{13} + s_{33};$$

hieraus folgt der cubische Compressionscoefficient:

$$(16) \quad M = s_{33} + 2(s_{11} + s_{12}) + 4s_{13}.$$

Der Coefficient B der Winkeländerung bei allseitig gleichem Druck ist:

$$(17) \quad B = s_{13} + s_{33} - s_{11} - s_{13}.$$

Aus den Grössen  $s_{hk}$  folgen unter Benutzung der thermischen linearen Ausdehnungscoefficienten  $a_3$  und  $a_1$  parallel und normal zur Hauptaxe auch die Coefficienten  $q_3$  und  $q_1$  der Wärmeabstossung in diesen Richtungen; es gilt nämlich:

$$(18) \quad q_3 = 2a_1c_{13} + a_3c_{33}, \quad q_1 = a_1(c_{11} + c_{12}) + a_3c_{13}.$$

Sind die  $s_{hk}$  aus den Beobachtungen berechnet, so bestimmen sich aus ihnen die Elasticitätsconstanten  $c_{hk}$  gemäss folgenden Formeln:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{11} + c_{12} = \frac{s_{33}}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2}, \quad c_{11} - c_{12} = \frac{s_{44}}{s_{44}(s_{11} - s_{12}) - 2s_{14}^2}, \\ c_{13} = \frac{-s_{13}}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2}, \quad c_{14} = \frac{-s_{14}}{s_{44}(s_{11} - s_{12}) - 2s_{14}^2}, \\ c_{33} = \frac{s_{11} + s_{12}}{s_{33}(s_{11} + s_{12}) - 2s_{13}^2}, \quad c_{44} = \frac{s_{11} - s_{12}}{s_{44}(s_{11} - s_{12}) - 2s_{14}^2}. \end{array} \right.$$

Diese Constanten  $c_{hk}$  wie auch ihre mit  $s_{hk}$  bezeichneten Aggregate heissen isothermische Elasticitätsconstanten, da sie elastische Deformationen messen, welche durch gegebene äussere Einwirkung bei constanter Temperatur hervorgebracht werden. Ihnen treten die adiabatischen  $\gamma_{hk}$  und  $\sigma_{hk}$  gegen-

über, welche die Aenderungen bei verhinderter Wärmebewegung bestimmen. Zwischen ihnen gelten die Beziehungen:

$$(20) \quad \gamma_{hk} = c_{hk} + \frac{q_h q_k \Theta}{A \varepsilon c}, \quad \sigma_{hk} = s_{hk} - \frac{a_h a_k \Theta}{A \varepsilon c},$$

in denen  $\Theta$  die absolute Temperatur,  $A$  das mechanische Wärmeäquivalent,  $\varepsilon$  die Dichte des Krystalls,  $c$  seine gewöhnliche specifische Wärme bezeichnet.

Endlich sei noch der Werth der Differenz der beiden specifischen Wärmen  $c_p$  und  $c_d$  bei constanten Spannungen und constanten Deformationen angegeben; es gilt:

$$(21) \quad c_p - c_d = \frac{\Theta}{A \varepsilon} (2 q_1 a_1 + q_3 a_3).$$

### Biegungen.

Die folgenden Tafeln enthalten nach der Angabe des Beobachters und neben der Bezeichnung jedes Stäbchens zunächst seine Dimensionen, die Längen in Millimetern, die Breiten und Dicken in Trommeltheilen des Sphärometers (= 1/992,6 mm). Da Breite und Dicke von Querschnitt zu Querschnitt wechselten, so sind ihre in Rechnung zu ziehenden Werthe je nach der Länge, in welcher das Stäbchen benutzt ist, verschieden; die Art ihrer Berechnung habe ich früher<sup>1)</sup> auseinandergesetzt.

Es folgen dann die bei den in Grammen angegebenen Belastungen  $P$  gemessenen Biegungen  $\eta$  in Scalentheilen der Beobachtungsapparate, welche bei den Baumgarten'schen Beobachtungen 0,001 340 mm, bei den meinen 0,0002954 mm entsprachen; die angegebenen Zahlen sind bereits wegen der Eindrückung der Lagerschneide corrigirt, deren Betrag durch zwei Beobachtungen derselben Stäbchen in sehr kleinen Längen ermittelt ist.

Der Werth von  $\eta$  ist in einzelnen Fällen, wo die Beobachtung bei erheblich von 20° C. abweichender Temperatur stattfind, noch um einen durch directe Beobachtung ermittelten Betrag  $\delta \eta$  zu corrigiren.

Aus den so erhaltenen reducirten Biegungen sind die

1) W. Voigt, l. c. p. 100.

Werthe von  $E^1$ ) berechnet, die am Ende jedes Systemes mitgetheilt sind. Die Vergleichung der so aus Baumgarten's und meinen Beobachtungen erhaltenen Zahlen gibt eine gute Uebereinstimmung. In der That ist ja auch bei beiden Berechnungen dasselbe System von Dimensionen  $B$  und  $D$  benutzt, Abweichungen können also nur durch Fehler in der Bestimmung von  $L$  und  $\eta$  bewirkt werden.

Hierbei ist aber zu bemerken, dass  $\eta$  ausser durch directe Ablesungsfehler auch durch ein etwas unrichtiges Auflegen des Stäbchens auf die Lager einen falschen Werth erhalten kann; da die Stäbchen nämlich alle etwas unregelmässige Form haben, z. B. auch an dem einen Ende dicker als an dem anderen sind, so wird, je nachdem das eine oder das andere Ende etwas weiter über das Lager hinausreicht, die Biegung grösser oder kleiner erscheinen. Bei ungünstigen Umständen kann schon eine kleine Abweichung von der zu den Schneiden symmetrischen Lage merkliche Differenzen verursachen.

Aus den für die einzelnen Stäbchen erhaltenen Resultaten für  $E$  sind die Gesamtmittel in der Weise berechnet, dass allen Stäbchen der gleiche Einfluss gegeben ist, z. B. also wo derselbe Beobachter ein Stäbchen in verschiedenen Längen benutzt hat, das Mittel aus den gefundenen Werthen das einfache Gewicht erhalten hat.

### Biegungen.

#### Beobachter B.

|               |              |                  |               |             |                     |
|---------------|--------------|------------------|---------------|-------------|---------------------|
| I (0°) Nr. 1. | $L = 50,0$ , | $B = 5595$ ,     | $D = 813,9$ , | $P = 100$ , |                     |
|               |              | $\eta = 128,6$ , |               |             | $E = 5\ 841\ 000$ . |
| I (0°) Nr. 2. | $L = 50,0$ , | $B = 5596$ ,     | $D = 817,3$ , | $P = 100$ , |                     |
|               |              | $\eta = 126,7$ , |               |             | $E = 5\ 848\ 000$ . |
| I (0°) Nr. 3. | $L = 50,0$ , | $B = 5611$ ,     | $D = 820,1$ , | $P = 100$ , |                     |
|               |              | $\eta = 125,6$ , |               |             | $E = 5\ 826\ 000$ . |
| I (0°) Nr. 4. | $L = 50,0$ , | $B = 5603$ ,     | $D = 805,4$ , | $P = 100$ , |                     |
|               |              | $\eta = 127,6$ , |               |             | $E = 5\ 836\ 000$ . |
| I (0°) Nr. 5. | $L = 50,0$ , | $B = 5609$ ,     | $D = 818,2$ , | $P = 100$ , |                     |
|               |              | $\eta = 126,2$ , |               |             | $E = 5\ 837\ 000$ . |

1) Ich habe diese Grössen und nicht die reciproken  $E = 1/E$  angegeben, weil sie in Lehrbüchern überall bevorzugt sind; für die eigentlichen Berechnungen hat man freilich immer von den  $E$  auszugehen.

## Beobachter V.

|                         |                 |                      |                              |           |                    |
|-------------------------|-----------------|----------------------|------------------------------|-----------|--------------------|
| I (0°) Nr. 1.           | $L = 50,07,^1)$ | $B = 5595,$          | $D = 813,9,$                 | $P = 60,$ |                    |
|                         | $\eta = 350,6,$ |                      |                              |           | $E = 5\ 832\ 000.$ |
| I (0°) Nr. 2.           | $L = 52,07,$    | $B = 5596,$          | $D = 817,3,$                 | $P = 60,$ |                    |
|                         | $\eta = 390,0,$ |                      |                              |           |                    |
|                         | $L = 50,07,$    | $\eta = 342,7,$      |                              |           | $E = 5\ 850\ 000.$ |
| I (0°) Nr. 3.           | $L = 44,07,$    | $B = 5608,$          | $D = 821,8,$                 | $P = 60,$ |                    |
|                         | $\eta = 232,0,$ |                      |                              |           | $E = 5\ 817\ 000.$ |
| I (0°) Nr. 5.           | $L = 50,07,$    | $B = 5609,$          | $D = 818,2,$                 | $P = 60,$ |                    |
|                         | $\eta = 343,3,$ |                      |                              |           | $E = 5\ 842\ 000.$ |
| Gesamtmittel            |                 | $E_0 = 5\ 837\ 000,$ | $E_0 = 17,13 \cdot 10^{-3},$ |           |                    |
| Wahrscheinlicher Fehler |                 | $\pm 2400,$          | $\pm 0,007.$                 |           |                    |

## Beobachter B.

|                 |                 |             |              |            |                    |
|-----------------|-----------------|-------------|--------------|------------|--------------------|
| I (-70°) Nr. 1. | $L = 50,0,$     | $B = 5589,$ | $D = 828,2,$ | $P = 100,$ |                    |
|                 | $\eta = 124,1,$ |             |              |            | $E = 5\ 749\ 000.$ |
| I (-70°) Nr. 2. | $L = 50,0,$     | $B = 5597,$ | $D = 831,6,$ | $P = 100,$ |                    |
|                 | $\eta = 122,2,$ |             |              |            | $E = 5\ 754\ 000.$ |
|                 | $L = 60,1,$     | $B = 5594,$ | $D = 831,6,$ | $P = 100,$ |                    |
|                 | $\eta = 214,0,$ |             |              |            | $E = 5\ 719\ 000.$ |
| I (-70°) Nr. 3. | $L = 50,0,$     | $B = 5601,$ | $D = 836,4,$ | $P = 100,$ |                    |
|                 | $\eta = 120,1,$ |             |              |            | $E = 5\ 752\ 000.$ |
|                 | $L = 60,1,$     | $B = 5598,$ | $D = 835,9,$ | $P = 100,$ |                    |
|                 | $\eta = 210,0,$ |             |              |            | $E = 5\ 729\ 000.$ |
| I (-70°) Nr. 4. | $L = 50,0,$     | $B = 5592,$ | $D = 835,9,$ | $P = 100,$ |                    |
|                 | $\eta = 120,3,$ |             |              |            | $E = 5\ 761\ 000.$ |
|                 | $L = 60,1,$     | $B = 5589,$ | $D = 835,5,$ | $P = 100,$ |                    |
|                 | $\eta = 210,3,$ |             |              |            | $E = 5\ 735\ 000.$ |
| I (-70°) Nr. 5. | $L = 50,0,$     | $B = 5604,$ | $D = 833,5,$ | $P = 100,$ |                    |
|                 | $\eta = 121,2,$ |             |              |            | $E = 5\ 757\ 000.$ |

## Beobachter V.

|                 |                 |                     |              |           |                    |
|-----------------|-----------------|---------------------|--------------|-----------|--------------------|
| I (-70°) Nr. 1. | $L = 55,07,$    | $B = 5589,$         | $D = 828,2,$ | $P = 60,$ | $\vartheta = 16,$  |
|                 | $\eta = 448,7,$ | $\delta\eta = 1,0,$ |              |           | $E = 5\ 770\ 000.$ |
| I (-70°) Nr. 2. | $L = 60,07,$    | $B = 5594,$         | $D = 831,1,$ | $P = 60,$ | $\vartheta = 16,$  |
|                 | $\eta = 574,6,$ | $\delta\eta = 1,3,$ |              |           | $E = 5\ 778\ 000.$ |
| I (-70°) Nr. 3. | $L = 60,07,$    | $B = 5598,$         | $D = 835,9,$ | $P = 60,$ | $\vartheta = 16,$  |
|                 | $\eta = 563,8,$ | $\delta\eta = 1,3,$ |              |           | $E = 5\ 789\ 000.$ |
| I (-70°) Nr. 4. | $L = 58,07,$    | $B = 5589,$         | $D = 835,5,$ | $P = 60,$ | $\vartheta = 16,$  |
|                 | $\eta = 512,3,$ | $\delta\eta = 1,2,$ |              |           | $E = 5\ 769\ 000.$ |

1) 0,07 ist die Correction der direct abgelesenen Länge an meinem Biegungsapparate.

|   |              |                 |                     |                    |                |
|---|--------------|-----------------|---------------------|--------------------|----------------|
| I ( $-70^\circ$ ) Nr. 5.  | $L = 55,07,$ | $B = 5604,$     | $D = 833,5,$        | $P = 60,$          | $\delta = 16,$ |
|   |              | $\eta = 440,6,$ | $\delta\eta = 1,0,$ | $E = 5\,748\,000.$ |                |
| Gesamtmittel $E_{-70} = 5\,756\,000,$ $E_{-70} = 17,37 \cdot 10^{-8}$ |              |                 |                     |                    |                |
| Wahrscheinlicher Fehler $\pm 4600,$ $\pm 0,014.$                      |              |                 |                     |                    |                |

## Beobachter B.

|                          |             |                 |              |                     |  |
|--------------------------|-------------|-----------------|--------------|---------------------|--|
| I ( $+50^\circ$ ) Nr. 1. | $L = 50,0,$ | $B = 5614,$     | $D = 820,0,$ | $P = 100,$          |  |
|                          |             | $\eta = 65,68,$ |              | $E = 11\,130\,000.$ |  |
| I ( $+50^\circ$ ) Nr. 2. | $L = 50,0,$ | $B = 5619,$     | $D = 824,7,$ | $P = 100,$          |  |
|                          |             | $\eta = 64,62,$ |              | $E = 11\,130\,000.$ |  |
| I ( $+50^\circ$ ) Nr. 3. | $L = 50,0,$ | $B = 5612,$     | $D = 819,9,$ | $P = 100,$          |  |
|                          |             | $\eta = 65,56,$ |              | $E = 11\,170\,000.$ |  |
| I ( $+50^\circ$ ) Nr. 4. | $L = 50,0,$ | $B = 5612,$     | $D = 819,3,$ | $P = 100,$          |  |
|                          |             | $\eta = 65,46,$ |              | $E = 11\,200\,000.$ |  |
| I ( $+50^\circ$ ) Nr. 5. | $L = 50,0,$ | $B = 5598,$     | $D = 821,0,$ | $P = 100,$          |  |
|                          |             | $\eta = 65,20,$ |              | $E = 11\,220\,000.$ |  |

## Beobachter V.

|  |              |                 |              |                     |  |
|--|--------------|-----------------|--------------|---------------------|--|
| I ( $+50^\circ$ ) Nr. 1.   | $L = 48,07,$ | $B = 5614,$     | $D = 820,0,$ | $P = 80,$           |  |
|  |              | $\eta = 211,0,$ |              | $E = 11\,180\,000.$ |  |
| I ( $+50^\circ$ ) Nr. 2.   | $L = 48,07,$ | $B = 5619,$     | $D = 824,7,$ | $P = 80,$           |  |
|  |              | $\eta = 208,4,$ |              | $E = 11\,130\,000.$ |  |
| I ( $+50^\circ$ ) Nr. 3.   | $L = 48,07,$ | $B = 5612,$     | $D = 819,9,$ | $P = 80,$           |  |
|  |              | $\eta = 211,5,$ |              | $E = 11\,160\,000.$ |  |
| I ( $+50^\circ$ ) Nr. 4.   | $L = 48,07,$ | $B = 5612,$     | $D = 819,3,$ | $P = 80,$           |  |
|  |              | $\eta = 211,3,$ |              | $E = 11\,180\,000.$ |  |
| Gesamtmittel $E_{+50} = 11\,167\,000,$ $E_{+50} = 8,955 \cdot 10^{-8}$ |              |                 |              |                     |  |
| Wahrscheinlicher Fehler $\pm 7000$ $\pm 0,005.$                        |              |                 |              |                     |  |

## Beobachter B.

|                          |             |                  |              |                    |  |
|--------------------------|-------------|------------------|--------------|--------------------|--|
| II ( $90^\circ$ ) Nr. 1. | $L = 50,0,$ | $B = 5607,$      | $D = 836,2,$ | $P = 100,$         |  |
|                          |             | $\eta = 76,96,$  |              | $E = 8\,974\,000.$ |  |
|                          | $L = 60,1,$ | $B = 5604,$      | $D = 836,0,$ | $P = 100,$         |  |
|                          |             | $\eta = 134,14,$ |              | $E = 8\,954\,000.$ |  |
| II ( $90^\circ$ ) Nr. 2. | $L = 50,0,$ | $B = 5607,$      | $D = 838,5,$ | $P = 100,$         |  |
|                          |             | $\eta = 76,28,$  |              | $E = 8\,980\,000.$ |  |
|                          | $L = 60,1,$ | $B = 5605,$      | $D = 838,3,$ | $P = 100,$         |  |
|                          |             | $\eta = 133,6,$  |              | $E = 8\,917\,000.$ |  |
| II ( $90^\circ$ ) Nr. 3. | $L = 50,0,$ | $B = 5601,$      | $D = 848,8,$ | $P = 100,$         |  |
|                          |             | $\eta = 73,12,$  |              | $E = 9\,041\,000.$ |  |
|                          | $L = 80,0,$ | $B = 5593,$      | $D = 848,1,$ | $P = 100,$         |  |
|                          |             | $\eta = 303,2,$  |              | $E = 8\,965\,000.$ |  |

|                 |             |                 |              |                    |
|-----------------|-------------|-----------------|--------------|--------------------|
| II (90°) Nr. 4. | $L = 50,0,$ | $B = 5610,$     | $D = 855,9,$ | $P = 100,$         |
|                 |             | $\eta = 71,44,$ |              | $E = 9\ 010\ 000.$ |
|                 | $L = 80,0,$ | $B = 5601,$     | $D = 855,3,$ | $P = 100,$         |
|                 |             | $\eta = 294,4,$ |              | $E = 8\ 987\ 000.$ |
| II (90°) Nr. 5. | $L = 50,0,$ | $B = 5608,$     | $D = 852,2,$ | $P = 100,$         |
|                 |             | $\eta = 72,88,$ |              | $E = 9\ 051\ 000.$ |
|                 | $L = 80,0,$ | $B = 5599,$     | $D = 851,3,$ | $P = 100,$         |
|                 |             | $\eta = 298,2,$ |              | $E = 9\ 005\ 000.$ |

## Beobachter V.

|                 |              |                 |              |                    |
|-----------------|--------------|-----------------|--------------|--------------------|
| II (90°) Nr. 1. | $L = 58,07,$ | $B = 5604,$     | $D = 836,0,$ | $P = 30,$          |
|                 |              | $\eta = 165,1,$ |              | $E = 8\ 930\ 000.$ |
| II (90°) Nr. 2. | $L = 64,07,$ | $B = 5605,$     | $D = 838,3,$ | $P = 30,$          |
|                 |              | $\eta = 220,5,$ |              | $E = 8\ 913\ 000.$ |
| II (90°) Nr. 3. | $L = 84,07,$ | $B = 5598,$     | $D = 848,1,$ | $P = 30,$          |
|                 |              | $\eta = 476,8,$ |              | $E = 9\ 024\ 000.$ |
| II (90°) Nr. 4. | $L = 88,07,$ | $B = 5601,$     | $D = 855,3,$ | $P = 30,$          |
|                 |              | $\eta = 531,5,$ |              | $E = 9\ 036\ 000.$ |
| II (90°) Nr. 5. | $L = 88,07,$ | $B = 5599,$     | $D = 851,3,$ | $P = 30,$          |
|                 |              | $\eta = 540,1,$ |              | $E = 9\ 026\ 000.$ |

## Beobachter B.

|                  |             |                 |              |                    |
|------------------|-------------|-----------------|--------------|--------------------|
| II' (90°) Nr. 1. | $L = 50,0,$ | $B = 5612,$     | $D = 845,6,$ | $P = 100,$         |
|                  |             | $\eta = 74,2,$  |              | $E = 8\ 993\ 000.$ |
|                  | $L = 65,0,$ | $B = 5609,$     | $D = 845,4,$ | $P = 100,$         |
|                  |             | $\eta = 163,3,$ |              | $E = 8\ 987\ 000.$ |
| II' (90°) Nr. 2. | $L = 50,0,$ | $B = 5604,$     | $D = 861,8,$ | $P = 100,$         |
|                  |             | $\eta = 70,2,$  |              | $E = 8\ 993\ 000.$ |
|                  | $L = 65,0,$ | $B = 5600,$     | $D = 861,6,$ | $P = 100,$         |
|                  |             | $\eta = 154,6,$ |              | $E = 8\ 987\ 000.$ |
| II (90°) Nr. 3.  | $L = 50,0,$ | $B = 5613,$     | $D = 851,4,$ | $P = 100,$         |
|                  |             | $\eta = 73,44,$ |              | $E = 8\ 900\ 000.$ |
|                  | $L = 80,0,$ | $B = 5605,$     | $D = 851,0,$ | $P = 100,$         |
|                  |             | $\eta = 301,5,$ |              | $E = 8\ 904\ 000.$ |
| II' (90°) Nr. 4. | $L = 50,0,$ | $B = 5602,$     | $D = 857,7,$ | $P = 100,$         |
|                  |             | $\eta = 71,28,$ |              | $E = 8\ 987\ 000.$ |
|                  | $L = 80,0,$ | $B = 5595,$     | $D = 857,5,$ | $P = 100,$         |
|                  |             | $\eta = 293,3,$ |              | $E = 8\ 960\ 000.$ |

## Beobachter V.

|                  |              |                 |              |                    |
|------------------|--------------|-----------------|--------------|--------------------|
| II' (90°) Nr. 1. | $L = 68,07,$ | $B = 5609,$     | $D = 845,4,$ | $P = 30,$          |
|                  |              | $\eta = 256,5,$ |              | $E = 8\ 937\ 000.$ |
| II' (90°) Nr. 2. | $L = 66,07,$ | $B = 5600,$     | $D = 861,6,$ | $P = 30,$          |
|                  |              | $\eta = 221,8,$ |              | $E = 8\ 948\ 000.$ |

$$\text{II}'(90^\circ) \text{ Nr. 3. } L = 82,07, \quad B = 5605, \quad D = 851,0, \quad P = 25, \\ \eta = 368,2, \quad E = 8\,930\,000.$$

$$\text{II}'(90^\circ) \text{ Nr. 4. } L = 82,07, \quad B = 5595, \quad D = 857,5, \quad P = 25, \\ \eta = 358,0, \quad E = 8\,986\,000.$$

$$\text{Gesamtmittel} \quad E_{90} = 8\,977\,000, \quad E_{90} = 11,14 \cdot 10^{-8}.$$

$$\text{Wahrscheinlicher Fehler} \quad \pm 6500, \quad \pm 0,008.$$

Um die vorstehenden Resultate zur Berechnung der Coëfficienten in dem Ausdruck für  $E$  zu benutzen, waren zunächst die genauen Orientirungen der Stäbchen I ( $-70^\circ$ ) und I ( $+50^\circ$ ) zu bestimmen. Die Abweichungen ihrer Längsrichtungen aus dem ersten Hauptschnitt sind ohne Einfluss auf die Berechnung, es genügte also, mit dem Reflexionsgoniometer die Winkel zu bestimmen, welche ihre Breitseiten mit der Spaltungsfläche normal zu dem betreffenden Hauptschnitte einschlossen. Diese Winkel fanden sich bei den genannten beiden Gattungen resp. gleich  $24^\circ 0'$  und  $83^\circ 59'$ . Da nun die Spaltungsflächen den Winkel  $45^\circ 23,5'$  mit der Hauptaxe einschliessen, so finden sich die gesuchten Winkel zwischen der Hauptaxe und den Längsrichtungen dieser beiden Stäbchengattungen resp.

$$\text{gleich } -69^\circ 23' \text{ und } +50^\circ 38'.$$

Aus den erhaltenen vier Werthen für  $E$ :

$$\begin{aligned} E_0 &= (17,13 \pm 0,007) 10^{-8}, & E_{+50} &= (8,955 \pm 0,005) 10^{-8}, \\ E_{-70} &= (17,37 \pm 0,014) 10^{-8}, & E_{90} &= (11,14 \pm 0,008) 10^{-8}. \end{aligned}$$

berechnen sich nunmehr nach (10) zunächst folgende vier Aggregate der  $s_{hk}$ :

$$(22) \quad \begin{cases} s_{11} = (11,14 \pm 0,008) 10^{-8}, \\ s_{33} = (17,13 \pm 0,007) 10^{-8}, \\ s_{44} + 2s_{13} = (31,05 \pm 0,030) 10^{-8}, \\ s_{14} = (8,983 \pm 0,017) 10^{-8}. \end{cases}$$

Der allgemeine Werth für  $E$  nimmt dadurch folgende Gestalt an:

$$(23) \quad E = 11,14\beta^4 + 17,13\gamma^4 + 31,05\beta^2\gamma^2 + 17,97\beta\gamma(3\alpha^2 - \beta^2).$$

In dem ersten Hauptschnitt, für welchen  $\alpha=0$  ist, finden Maxima und Minima statt in den vier Richtungen, welche folgenden Winkeln gegen die Hauptaxe entsprechen:

$$\varphi_I = -50^\circ 52', \quad \varphi_{II} = -7^\circ 7', \quad \varphi_{III} = 0^\circ, \quad \varphi_{IV} = +66^\circ 46'.$$

Mit diesen Werthen stimmen befriedigend die aus Baumgartens früheren Beobachtungen folgenden:

$\varphi_I' = -49^\circ 30'$ ,  $\varphi_{II}' = -2^\circ 35'$ ,  $\varphi_{III}' = 0^\circ$ ,  $\varphi_{IV}' = +68^\circ 16'$ ; die Factoren in der Gleichung für E, nämlich 15,06, 23,65, 45,70, 24,10, weichen stark in dem Sinne ab, der daraus folgt, dass bei jenen Beobachtungen nicht polirte, sondern matt geschliffene Stäbchen benutzt sind. Ihr Verhältniss zu den richtigen Werthen ist ziemlich constant, nämlich 1,35, 1,38, 1,47, 1,34, was die Uebereinstimmung in der Lage der Maxima und Minima zur Folge hat und darauf hinweist, dass die verschiedenen Stäbchen infolge des Schliffes nahe gleiche oberflächliche Poren besessen haben.

Die Maximal- und Minimalwerthe von E haben folgende Grössen:

$$E_I = 19,49 \cdot 10^{-8}, \quad E_{II} = 17,12 \cdot 10^{-8}, \quad E_{III} = 17,13 \cdot 10^{-8}, \\ E_{IV} = 6,94 \cdot 10^{-8}.$$

Das Minimum  $E_{II}$  und das Maximum  $E_{III}$  sind so nahe gleich, dass ihre gegenseitige Lage nur ungenau bestimmbar ist. Man möchte zunächst vermuthen, dass sie in Wirklichkeit zusammenfallen. Dann müsste nach der Formel für E:

$$2s_{33} = s_{44} + 2s_{13}$$

sein; da diese Grössen aber um ein Zehntel ihres Werthes verschieden gefunden sind, so ist diese Möglichkeit auszuschliessen.

Für den zweiten Hauptschnitt ( $\beta = 0$ ) kommt in Formel (23) nur das letzte Glied in Wegfall, wodurch E eine gerade Function der Winkel gegen die X- und Z-Axe wird. Maxima und Minima finden nur in diesen Axenrichtungen statt; sie sind die direct beobachteten Werthe.

$$E_0 = 17,13 \cdot 10^{-8}, \quad E_{90} = 11,14 \cdot 10^{-8}.$$

Fig. 1 stellt die Curven dar, welche man erhält, wenn man im I. und II. Hauptschnitt die Grösse von E, durch eine Länge repräsentirt, auf der zugehörigen Richtung aufträgt.

#### Drillungen.

Die Drillungsbeobachtungen sind mit dem auch früher von mir benutzten Spiegelapparat angestellt; der Abstand A zwischen Spiegel und Scala betrug 5173 mm, die Milli-



meter der letzteren waren um 0,00374 zu gross. Die in den folgenden Tafeln angegebenen  $\sigma$  sind die an der Scala beobachteten, bereits von der Tangente auf den Bogen reducierten Längen für die Belastungen  $G+P$ , wobei  $G$  das

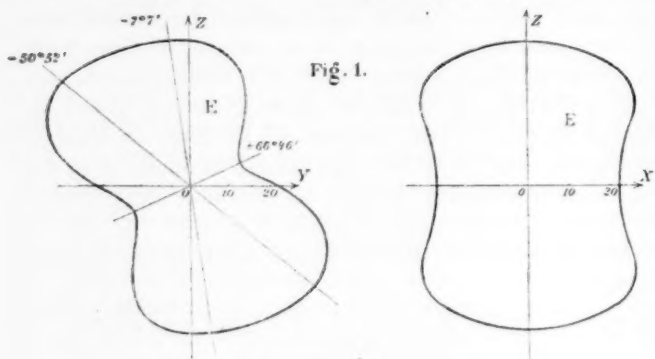


Fig. 1.

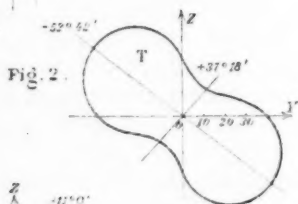


Fig. 2.

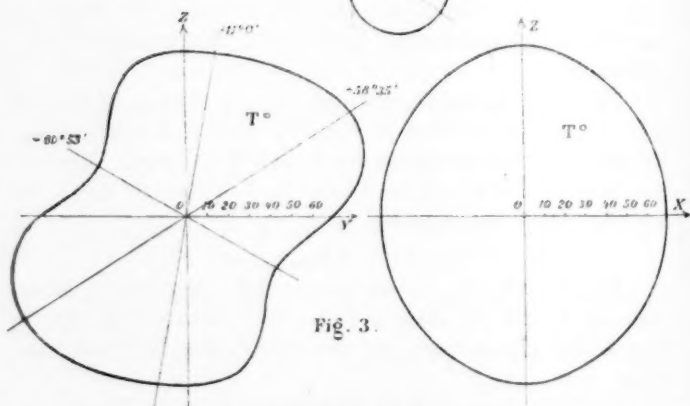


Fig. 3.

Gewicht der Wagschale bezeichnet, das bei der Elimination der Axenreibung aus der Rechnung herausfällt.  $lR$  und  $rR$  deuten an, dass die Beobachtungen an der linken oder

rechten Rolle des Apparates angestellt sind; das Mittel von deren Radien  $R$  betrug 36,80 mm;  $\rho$  gibt die Grösse der Axenreibung in Theilen der Scala an.

Aus sämmtlichen Beobachtungen ist die dem Moment  $RP$  entsprechende Drehung  $\sigma_P$  berechnet und unter jede Beobachtungsreihe gesetzt;  $\sigma_P/A$  ist die doppelte Drehung  $2\tau_P$  in Theilen des Radius, welche  $RP$  entspricht.

Aus diesem Werthe  $\tau$  und den angegebenen Dimensionen sind nach den Formeln (7), (11) und (12) unter Benutzung des oben erhaltenen Werthes  $s_{14} = 8,98 \cdot 10^{-8}$  durch successive Annäherung die Drillungswiderstände  $T_{90}$  und  $T'_{90}$  berechnet und aus ihnen die Gesamtmittel in gewöhnlicher Weise gebildet.

|                 |                   |             |              |                    |
|-----------------|-------------------|-------------|--------------|--------------------|
| II (90°) Nr. 1. | $L = 44,41,$      | $B = 5607,$ | $D = 835,7,$ | $P = 20,$          |
|                 | $\sigma = 99,85,$ |             |              | $T = 3\,385\,000.$ |
| II (90°) Nr. 2. | $L = 51,27,$      | $B = 5607,$ | $D = 837,7,$ | $P = 20,$          |
|                 | $\sigma = 114,4,$ |             |              | $T = 3\,396\,000.$ |
| II (90°) Nr. 3. | $L = 64,22,$      | $B = 5599,$ | $D = 849,9,$ | $P = 20,$          |
|                 | $\sigma = 139,3,$ |             |              | $T = 3\,384\,000.$ |

Wiederholt bei anderer Einstellung

$$\sigma = 139,2, \quad T = 3\,386\,000.$$

$$\text{Gesamtmittel} \quad T_{90} = 3\,388\,000, \quad T = 29,515 \cdot 10^{-8}$$

$$\text{Wahrscheinlicher Fehler} \quad \pm 2500 \quad \pm 0,022.$$

|                  |                   |             |              |                    |
|------------------|-------------------|-------------|--------------|--------------------|
| II' (90°) Nr. 1. | $L = 52,42,$      | $B = 5603,$ | $D = 845,1,$ | $P = 20,$          |
|                  | $\sigma = 147,5,$ |             |              | $T = 2\,528\,000.$ |
| II' (90°) Nr. 2. | $L = 52,17,$      | $B = 5603,$ | $D = 861,1,$ | $P = 20,$          |
|                  | $\sigma = 139,9,$ |             |              | $T = 2\,523\,000.$ |
| II' (90°) Nr. 3. | $L = 65,74,$      | $B = 5609,$ | $D = 848,4,$ | $P = 20,$          |
|                  | $\sigma = 183,8,$ |             |              | $T = 2\,522\,000.$ |
| II' (90°) Nr. 4. | $L = 65,01,$      | $B = 5599,$ | $D = 857,1,$ | $P = 20,$          |
|                  | $\sigma = 176,8,$ |             |              | $T = 2\,524\,000.$ |

$$\text{Gesamtmittel} \quad T_{90}' = 2\,524\,000, \quad T_{90}' = 39,62 \cdot 10^{-8}.$$

$$\text{Wahrscheinlicher Fehler} \quad \pm 900, \quad \pm 0,014.$$

Die Berechnung der  $T_{90}$  und  $T'_{90}$  ist im Vorstehenden so ausgeführt, als wäre die Orientirung der Stäbchen absolut genau; wir wollen nun nachträglich an den Resultaten die kleinen Correctionen anbringen, welche infolge der Fehler der Orientirung nöthig sind. Dies geht an, weil dieselben auf den Werth der bei der Berechnung benutzten Functionen  $f$  keinen merklichen Einfluss üben.

Die Abweichung der Längsrichtung der benutzten Stäbchen von der Normalen zur krystallographischen Symmetrieebene, d. h. der  $X$ -Axe, übt keinen merklichen Einfluss, da diese eine Maximalrichtung für den Drillungscoefficienten darstellt. Dagegen ist die Abweichung der Breiten- und Dickenrichtung von der  $Y$ - und  $Z$ -Axe von Wichtigkeit.

Um diese Abweichungen zu bestimmen, wurden von zwei Stäbchen Stücken abgeschnitten und an diesen je eine Spaltungsfläche angebrochen; deren Winkel gegen die Breitseiten liessen sich mit dem Reflexionsgoniometer leicht bestimmen.

Aus den für die Gattung II ( $90^\circ$ ) und II' ( $90^\circ$ ) erhaltenen Werthen  $44^\circ 45'$  und  $45^\circ 32,5'$  fand sich unter Benutzung des Werthes  $45^\circ 23,5'$  für den Winkel der Hauptaxe mit der Spaltungsfläche für die Gattung:

$$\text{II } (90^\circ) \quad \angle (B, Y) = \angle (D, Z) = -8,5'$$

$$\text{II}' (90^\circ) \quad \angle (D, Y) = \angle (B, Z) = -9,0';$$

beide Winkel ergaben sich also merklich gleich, entsprechend dem Umstande, dass die Stäbchen aus derselben Platte, welche der  $XZ$ -Ebene nahe parallel gewesen war, hergestellt sind.

Nehmen wir abgerundet  $9'$  als die Grösse der Abweichung an und berücksichtigen, dass nach Formel (9):

$$T_{00} \text{ um } 4s_{11} \sin(9') \cos(9') \text{ zu vergrössern,}$$

$$T_{00}' \text{ um ebensoviel zu verkleinern}$$

ist, um die Werthe  $2(s_{11} - s_{12})$ , resp.  $s_{44}$  zu liefern, so findet man:

$$2(s_{11} - s_{12}) = (29,61 \pm 0,022) 10^{-9},$$

$$s_{44} = (39,52_5 \pm 0,014) 10^{-9}$$

als definitive Werthe.

Wie ich schon in der Einleitung angegeben, will ich nun auch die Resultate der Drillung der Stäbchen I ( $0^\circ$ ) mittheilen und sie unter der Annahme berechnen, dass für sie  $f$  denselben Werth  $-0,630$  hat, der nach der Theorie für unkrystallinische Medien gilt, was die plausible Hypothese enthält, dass hinsichtlich der resultirenden Drehung für ein Stäbchen parallel der Hauptaxe die Lage der Querdimensionen ohne Einfluss ist.

$$\text{I } (0^\circ) \text{ Nr. 1. } L = 35,04, B = 5598, D = 814,2, \delta = 23, P = 20.$$

$$\sigma = 113,0.$$

$$(T = 2\,500\,000).$$

Diese Beobachtung schliesse ich wegen der höheren Temperatur, auf welche sie sich bezieht, von der Berechnung aus:

$$\text{I (0°) Nr. 2. } L = 39,16, \quad B = 5599, \quad D = 817,5, \quad P = 20, \\ \sigma = 123,2, \quad T = 2\,532\,000.$$

I (0°) Nr. 3 zerbrach beim Torquieren.

$$\text{I (0°) Nr. 4. } L = 39,15, \quad B = 5611, \quad D = 815,7, \quad P = 20, \\ \sigma = 124,2, \quad T = 2\,522\,000.$$

$$\text{I (0°) Nr. 5. } L = 38,31, \quad B = 5612, \quad D = 818,7, \quad P = 20, \\ \sigma = 119,7, \quad T = 2\,532\,000.$$

$$\text{Gesamtmittel } T_0 = 2\,528\,000, \quad T_0 = 39,56 \cdot 10^{-8}.$$

$$\text{Wahrscheinlicher Fehler } \pm 2200, \quad \pm 0,34.$$

Auch dies Resultat ist wegen des Fehlers in der Orientirung zu corrigiren, denn für den Drillungscoefficienten eines rechteckigen Prismas ist die Z-Hauptaxe keine Maximal- oder Minimalrichtung.

Die Beobachtung am Reflexionsgoniometer ergab, dass die Längsaxe um 4' nach der Seite der +Y- zu von der +Z-Axe abwich. Nach Formel (6) ist daher  $4s_{14} \sin(4') \cos(4')$  von  $T_0$  in Abzug zu bringen, um  $s_{44}$  zu erhalten. Man findet so:

$$s_{44} = (39,51_5 \pm 0,034) 10^{-8}.$$

Die Uebereinstimmung dieses Resultates mit dem durch die Beobachtung von Gattung II' (90°) erhaltenen ist ganz überraschend; die benutzte Hypothese ist also vollständig bestätigt und der wahrscheinliche Werth des Fehlers von  $s_{44}$  wird durch Combination beider Resultate noch erheblich herabgedrückt.

Wir schreiben das Endresultat:

$$(24) \quad 2(s_{11} - s_{12}) = (29,61 \pm 0,022) \cdot 10^{-8}, \\ s_{44} = (39,52 \pm 0,002) \cdot 10^{-8}.$$

Der allgemeine Werth des Drillungscoefficienten für ein rechteckiges Prisma, dessen Längsaxe in die X-Axe fällt und dessen Queraxen beliebig liegen, wird hiernach:

$$(25) \quad T = (39,52 - 9,91 \cdot \gamma_2^2 - 35,93 \cdot \gamma_2 \beta_2) 10^{-8}.$$

Er besitzt ein Maximum  $T_{\max} = 53,2 \cdot 10^{-8}$ , wenn die kleinere Querdimension  $D$  zwischen der +Y- und -Z-Axe liegt und mit der Y-Axe den Winkel  $37^\circ 17,5'$  einschliesst, ein Minimum  $T_{\min} = 15,93 \cdot 10^{-8}$ , wenn dieselbe zwischen der +Y- und +Z-Axe liegt und unter  $37^\circ 17,5'$  gegen letztere geneigt

ist. Der Einfluss der Lage der Querdimensionen ist also ganz enorm; Fig. 2 (p. 426) stellt  $T$  als Function der Richtung von  $D$  dar.

Der Drillungscoefficient  $T^0$  eines Kreiscylinders besitzt nach (14) den Werth:

$$(26) \quad T^0 = (69,13 - 1,21\gamma^2 + 11,12\gamma^4 - 71,86\beta\gamma(3\alpha^2 - \beta^2))10^{-8}.$$

In dem ersten Hauptschnitt, für welchen  $\alpha = 0$  ist, finden Maxima und Minima statt in den vier Richtungen, die folgenden Winkeln gegen die  $Z$ -Hauptaxe entsprechen:

$$q_I = -60^\circ 53', \quad q_{II} = 0, \quad q_{III} = +11^\circ 0', \quad q_{IV} = +58^\circ 35';$$

sie haben die Werthe:

$$T_I^0 = 46,15 \cdot 10^{-8}, \quad T_{II}^0 = 79,04 \cdot 10^{-8}, \quad T_{III}^0 = 78,77 \cdot 10^{-8}, \\ T_{IV}^0 = 92,90 \cdot 10^{-8}.$$

Für den zweiten Hauptschnitt ist  $\beta = 0$  und man erhält nur ein Maximum und ein Minimum entsprechend:

$$q_I = 0, \quad q_{II} = 90$$

mit den Werthen:

$$T_0^0 = 79,04 \cdot 10^{-8}, \quad T_{90}^0 = 69,13.$$

Fig. 3 (p. 426) stellt den Verlauf von  $T^0$  für beide Hauptschnitte anschaulich dar.

### Resultate.

Wir bilden nunmehr die Werthe aller der einzelnen  $s_{hk}$ , welche aus (22) und (24) folgen. Es findet sich:

$$(27) \quad \begin{cases} s_{11} = (11,14 \pm 0,008)10^{-8}, & s_{12} = -(3,67 \pm 0,013)10^{-8}, \\ s_{33} = (17,13 \pm 0,007)10^{-8}, & s_{13} = -(4,24 \pm 0,015)10^{-8}, \\ s_{44} = (39,52 \pm 0,002)10^{-8}, & s_{14} = +(8,98 \pm 0,017)10^{-8}. \end{cases}$$

Hieraus folgen zunächst die Coefficienten der lineären Dilatation bei allseitigem Druck:

$$(28) \quad A_1 = A_2 = 3,23 \cdot 10^{-6}, \quad A_3 = 8,65 \cdot 10^{-6};$$

Kalkspath verkürzt sich also parallel der Hauptaxe bei allseitig gleichem Druck sehr viel stärker als normal dazu. Der cubische Compressionscoefficient findet sich:

$$(28') \quad M = 15,11 \cdot 10^{-6}.$$

Diese Werthe sind erheblich kleiner als für Bergkrystall.

Der Coefficient der Winkeländerung bei allseitigem Druck ist:

$$(28'') \quad B = 5,42 \cdot 10^{-8},$$

nahe doppelt so gross und dabei von entgegengesetztem Vorzeichen als für Bergkrystall.

Die Elasticitätsconstanten  $c_{hk}$  erhalten folgende Werthe:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{ll} c_{11} = 13,97 \cdot 10^6, & c_{12} = + 4,65 \cdot 10^6, \\ c_{33} = 8,12 \cdot 10^6, & c_{13} = + 4,60 \cdot 10^6, \\ c_{44} = 3,49 \cdot 10^6, & c_{14} = - 2,12 \cdot 10^6; \end{array} \right.$$

sie beziehen sich, wie auch die  $s_{hk}$ , auf das ganz bestimmt fixirte Coordinatensystem und eine Temperatur von circa  $20^\circ \text{C}$ .

Aus den  $c_{hk}$  folgen in Verbindung mit den von Fizeau gefundenen Werthen der thermischen linearen Ausdehnungscoefficienten:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = - 5,40 \cdot 10^{-6}, \\ a_3 &= + 26,21 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

die Grössen der thermischen Drucke nach (18) zu:

$$(30) \quad \begin{aligned} q_1 &= q_2 = + 20,1, \\ q_3 &= + 163,1. \end{aligned}$$

Die Unterschiede der isothermischen und adiabatischen Elasticitätsconstanten bestimmen sich bei Einführung des Werthes der absoluten Temperatur  $\Theta = 293$ , des mechanischen Wärmeäquivalentes  $426\,000$ , der Dichte des Kalkspathes  $2,715 \cdot 10^{-3}$ ; seiner gewöhnlichen specifischen Wärme  $0,207$  nach (20) folgendermassen:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{11} - c_{11} = \gamma_{12} - c_{12} = + 0,035 \cdot 10^6, \\ \gamma_{13} - c_{13} = + 0,0040 \cdot 10^6, \quad \gamma_{33} - c_{33} = + 0,0326 \cdot 10^6, \\ \gamma_{44} - c_{44} = \gamma_{14} - c_{14} = 0; \end{array} \right.$$

die analogen Werthe für die  $s_{hk}$  werden:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{11} - \sigma_{11} = s_{12} - \sigma_{12} = + 0,0036 \cdot 10^{-8}, \\ s_{13} - \sigma_{13} = - 0,0173 \cdot 10^{-8}, \quad s_{33} - \sigma_{33} = + 0,084 \cdot 10^{-8}, \\ s_{44} - \sigma_{44} = s_{14} - \sigma_{14} = 0. \end{array} \right.$$

Endlich findet sich die Differenz der specifischen Wärmen bei constanter Spannung und bei constanter Deformation nach (21):

$$c_p - c_d = 0,00103,$$

und hieraus ihr Verhältniss:

$$\alpha = c_p / c_d = 1,005.$$

# **XI. Einige Bemerkungen über die Gleitflächen des Kalkspaths; von W. Voigt.**

(Aus den Nachr. v. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1889. Nr. 19;  
mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Der Kalkspath gestattet bekanntlich durch Ausübung geeigneter Druckkräfte die Erzeugung von Zwillingsbildungen, bei denen ein mehr oder minder grosser Theil des Krystalls, begrenzt durch eine zu einer Symmetrieebene senkrechte Ebene, die sogenannte Gleitfläche, sich in die Zwillingsstellung gegen diese begibt. Dabei erleiden die deformirten Theile Verschiebungen, welche ihren Abständen von der Gleitfläche proportional und sämmtlich der Schnittlinie der Gleitfläche mit der Symmetrieebene parallel sind, eine „einfache Schiebung“ nach der Bezeichnung von W. Thomson.

Legt man in die Gleitfläche ein  $\Xi H$ -System, dessen  $\Xi$ -Axe mit der  $X$ -Axe des in der vorigen Untersuchung benutzten Hauptaxensystems zusammenfällt, und bezeichnet die Verschiebung parallel der  $H$ -Axe mit  $\omega$ , so ist:

$$(1) \quad \omega = k\zeta$$

eine solche Verschiebung, wie sie bei der Bildung von Zwillingen durch Gleiten stattfindet.

Die Deformationsgrössen:

$$\xi_{\xi}, \eta_{\eta}, \zeta_{\zeta}, \eta_{\zeta}, \zeta_{\xi}, \xi_{\eta}$$

in Bezug auf das System, welches aus  $\Xi H$  durch Zufügung einer normalen  $Z$ -Axe hervorgeht, verschwinden dabei alle mit Ausnahme von  $\eta_{\zeta}$ , für welches gilt:

$$\eta_{\zeta} = k.$$

Bezeichnen wir die abgeleiteten Elasticitätsconstanten für dieses System mit  $\gamma_{hk}$ , so werden die Druckkräfte, welche zur Hervorbringung der obigen Deformation erforderlich sind:

$$(2) \quad \begin{aligned} -\Xi_{\xi} &= k\gamma_{14}, & -H_{\eta} &= k\gamma_{24}, & Z_{\zeta} &= k\gamma_{34}, \\ -H_{\zeta} &= k\gamma_{44}, & -Z_{\xi} &= k\gamma_{44}, & \Xi_{\eta} &= k\gamma_{04}, \end{aligned}$$

Diese Druckkräfte wollen wir untersuchen; wir lassen dabei die Art des Krystalles und die Neigung der  $\Xi H$ - gegen

die  $XY$ -Ebene vorerst noch willkürlich und setzen nur voraus, dass die  $\Xi$ - noch mit der  $X$ -Axe zusammenfällt.

Es handelt sich dann zunächst um die Berechnung der abgeleiteten Constanten  $\gamma_{hk}$  aus den Hauptelasticitätsconstanten  $c_{hk}$ , wofür ich an anderer Stelle<sup>1)</sup> die allgemeinen Formeln gegeben habe; in unserem Falle vereinfacht sich die Rechnung erheblich.

Bezeichnen wir den Winkel zwischen der  $H$ - und  $Y$ -Axe, positiv von der  $Y$ - nach der  $Z$ -Axe hingerechnet, mit  $\varphi$  und kürzen ab:

$$\cos \varphi = c, \quad \sin \varphi = s,$$

so findet sich leicht:

$$(3) \quad \begin{cases} \gamma_{14} = -c_{12}cs + c_{13}cs + c_{14}(c^2 - s^2), \\ \gamma_{24} = -c_{22}c^3s + c_{33}cs^3 + c_{44}2cs(c^2 - s^2) \\ \quad + c_{23}cs(c^2 - s^2) + c_{24}c^2(c^2 - 3s^2) + c_{34}s^2(3c^2 - s^2), \\ \gamma_{34} = -c_{22}c^3s + c_{33}cs^3 - c_{44}2cs(c^2 - s^2) \\ \quad - c_{23}cs(c^2 - s^2) + c_{24}s^2(3c^2 - s^2) + c_{34}c^2(c^2 - 3s^2), \\ \gamma_{44} = +c_{22}c^2s^2 + c_{33}c^2s^2 + c_{44}(c^2 - s^2)^2 \\ \quad - c_{23}2c^2s^2 - (c_{24} - c_{34})^2cs(c^2 - s^2), \\ \gamma_{54} = -c_{25}c^3s + c_{35}c^2s + c_{45}c(c^2 - s^2) \\ \quad + c_{26}cs^2 - c_{36}cs^2 - c_{46}s(c^2 - s^2), \\ \gamma_{64} = -c_{25}cs^2 + c_{35}cs^2 + c_{45}s(c^2 - s^2) \\ \quad - c_{26}c^2s + c_{36}c^2s + c_{46}c(c^2 - s^2). \end{cases}$$

Diese Werthe in (2) eingesetzt, ergeben dasjenige System von Druckkräften, welches in einem beliebigen Krystall eine einfache Schiebung parallel der  $YZ$ -Ebene hervorzubringen vermag.

Gehen wir nun zu einer Schiebung parallel der Symmetrieebene in einem Krystall des rhomboëdrischen Systems über, so wird noch einfacher wegen:

$$(4) \quad \begin{cases} c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \quad c_{24} = -c_{14}, \\ c_{25} = c_{35} = c_{45} = c_{26} = c_{36} = c_{46} = 0: \\ \gamma_{14} = -(c_{12} - c_{13})cs + c_{14}(c^3 - s^2), \\ \gamma_{24} = -c_{11}c^3s + c_{33}cs^3 + c_{44}2cs(c^2 - s^2) \\ \quad + c_{13}cs(c^2 - s^2) - c_{14}c^2(c^2 - 3s^2), \\ \gamma_{34} = -c_{11}cs^3 + c_{33}c^3s + c_{44}2cs(c^2 - s^2) \\ \quad - c_{13}cs(c^2 - s^2) - c_{14}s^2(3c^2 - s^2), \end{cases}$$

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 34. p. 50. 1887.

Ann. d. Phys. ☛ Chem. N. F. XXXIX.



$$(4) \quad \begin{cases} \gamma_{44} = + (c_{11} + c_{33}) c^2 s^2 + c_{44} (c^2 - s^2)^2 \\ \quad - c_{13} 2 c^2 s^2 + c_{14} 2 c s (c^2 - s^2), \\ \gamma_{54} = \gamma_{64} = 0. \end{cases}$$

Unter diesen Coëfficienten verdient  $\gamma_{44}$  besonderes Interesse, denn gemäss der Formel:

$$-H_z = \eta_z \gamma_{44}$$

misst es den Widerstand, welchen eine gegen die  $\Xi$ H-Ebene wirkende und parallel der H-Axe schiebende Kraft innerhalb des Krystalles findet.

Wir stellen uns die Frage:

*Wenn wir der  $\Xi$ H-Ebene durch Drehung um die  $\Xi$ -Symmetrieaxe alle möglichen Lagen ertheilen, für welche Lagen nimmt der Widerstand  $\gamma_{44}$  seine grössten und kleinsten Werthe an?*

Bezeichnet man den bezüglichlichen Werth von  $\varphi$  mit  $\Phi$ , so erhält man die Gleichung:

$$(5) \quad \operatorname{tg} 4 \Phi = \frac{-4 c_{14}}{c_{11} + c_{33} - 2 c_{13} - 4 c_{44}}.$$

Benutzt man die in der vorstehenden Arbeit erhaltenen Zahlenwerthe für Kalkspath, so folgt aus ihr:

$$\Phi = 24^\circ 18', 69^\circ 18', 114^\circ 18', 159^\circ 18',$$

und zwar gibt der erste und dritte Winkel Lagen kleinsten; der zweite und vierte grössten Verschiebungswiderstandes.

*Es ist nun sehr merkwürdig, dass die eine Ebene kleinsten Widerstandes nahe mit der Gleitfläche im Kalkspath zusammenfällt, denn während erstere mit der Hauptaxe den Winkel:*

$$65^\circ 42'$$

einschliesst, bildet die letztere den Winkel:

$$63^\circ 45',$$

wobei noch zu bedenken ist, dass die Berechnung wegen der unvermeidlichen Fehler der  $c_{hk}$  und wegen des Umstandes, dass in dem Nenner von Formel (5) der erste Theil sich fast vollständig gegen den zweiten hinweghebt, nicht sehr genau sein kann.

*Ferner ist bemerkenswerth, dass der Verschiebungswiderstand sehr erheblich mit der Lage der  $\Xi$ H-Ebene variirt; denn der Maximalwerth von  $\gamma_{44}$  beträgt:*

$$4,43 \cdot 10^6,$$

der Minimalwerth ist:  $2,28 \cdot 10^6,$

also fast nur die Hälfte des ersteren.

II. Obgleich die vorstehende Betrachtungsweise eine interessante Beziehung einer gewissen Function der Elasticitätsconstanten zu den Gleitflächen geliefert hat, so knüpft sie doch zu wenig an die wirklichen Umstände an, unter welchen Gleitflächen bei Kalkspath entstehen, um ganz zu befriedigen. Allerdings sind die bei den verschiedenen gebräuchlichen Methoden angewandten äusseren Kräfte durchaus der Rechnung unzugänglich, aber das ist sicher, dass man Gleitflächen auf sehr verschiedene Weise erhalten kann und dass, wenn auch das Endresultat, nämlich die Deformation, welche nach Aufhebung der äusseren Einwirkung zurückbleibt, eine „reine Schiebung“ ist, doch während des Processes noch andere Deformationen auftreten.

Es wird daher immerhin schon eine deutlichere Vorstellung von dem Vorgang geben, wenn wir untersuchen, welchen Betrag die Schiebung  $\eta_z$  für die  $\Xi H$ -Ebene annimmt, wenn gegen diese keine andere Kraft als die schiebende Druckcomponente  $H_z$  und zwar in constanter Grösse wirkt. Eine solche Einwirkung würde z. B. praktisch dadurch erreichbar sein, dass auf die Flächen eines dem Coordinatensystem  $\Xi, H, Z$  mit seinen Kanten parallelen Prismas geeignete Tangentialdrucke ausgeübt würden, nämlich auf die Flächen, deren Normale die  $\pm H$ -Axe ist, Kräfte parallel der  $\pm Z$ -Axe und umgekehrt.

Eine solche constante Kraft  $-H_z = K$  bringt dann die folgenden constanten Deformationen hervor:

$$(6) \quad \begin{cases} \xi_{\Xi} = K \sigma_{11}, & \eta_z = K \sigma_{21}, & \zeta_z = K \sigma_{31}, \\ \eta_{\Xi} = K \sigma_{41}, & \xi_z = K \sigma_{61}, & \xi_{\sigma} = K \sigma_{61}. \end{cases}$$

Die  $\sigma_{hk}$  sind dabei die auch in der vorigen Arbeit benutzten Determinantenverhältnisse, aber genommen von den abgeleiteten Constanten  $\gamma_{hk}$ ; sie stellen hier die Deformationscoefficienten dar und sind um so grösser, je grösser die durch  $K$  hervorgebrachte Deformation ist, je kleiner also der wirkende Widerstand ist.

Uns interessirt besonders der Factor  $\sigma_{41}$ , der Coefficient der Schiebung  $\eta_z$ , und wir stellen uns wiederum die Frage nach den Lagen der  $\Xi H$ -Ebene, welche durch die Symmetriaxe  $X$  geht, für welche  $\sigma_{41}$  seine grössten und kleinsten Werthe annimmt.

Behalten wir die obige Bedeutung des Winkels  $\varphi$  und die Abkürzungen  $s$  und  $c$  bei, so drückt sich  $\sigma_{44}$  allgemein folgendermassen durch das System der  $s_{hk}$  aus<sup>1)</sup>, welche sich auf die krystallographischen Hauptaxen beziehen:

$$(7) \sigma_{44} = (s_{22} + s_{33} - 2s_{23})4c^2s^2 - (s_{21} - s_{31})4cs(c^2 - s^2) + s_{44}(c^2 - s^2)^2;$$

angewandt auf das rhomboëdrische System ergibt dies wegen

$$s_{11} = s_{22}, \quad s_{14} = -s_{24}, \quad s_{31} = 0:$$

$$(8) \sigma_{44} = (s_{11} + s_{33} - 2s_{13})4s^2c^2 + s_{14}4cs(c^2 - s^2) + s_{44}(c^2 - s^2)^2.$$

Hieraus folgt, dass  $\sigma_{44}$  seine grössten und kleinsten Werthe annimmt für einen Winkel  $\Phi$ , der gegeben ist durch:

$$(9) \quad \operatorname{tg} 4\Phi = \frac{-2s_{14}}{s_{11} + s_{33} - 2s_{13} - s_{44}}.$$

Benutzen wir die in der vorigen Arbeit erhaltenen Werthe der  $s_{hk}$  für Kalkspath, so findet sich:

$$\Phi = 20^\circ 19', \quad 65^\circ 19', \quad 110^\circ 19', \quad 155^\circ 19',$$

und zwar entspricht der erste und dritte Werth einem Maximum, der zweite und vierte einem Minimum für  $\sigma_{44}$ .

Auch hier findet sich wieder eine bemerkenswerthe Annäherung der ersten Maximalebene an die Gleitfläche, denn der Winkel der letzteren gegen die Hauptaxe beträgt:

$$63^\circ 45',$$

der Winkel der ersteren:  $69^\circ 40'$ .

Die Abweichung ist grösser, als oben gefunden, trotzdem aber findet in der Gleitfläche ein Werth des Deformationscoëfficienten statt, der nur sehr wenig unterhalb des Maximalwerthes bleibt; der Maximalwerth von  $\sigma_{11}$  ist nämlich:

$$47,2 \cdot 10^{-8},$$

der Minimalwerth:

$$29,6 \cdot 10^{-8},$$

der für die Gleitfläche geltende:

$$46,5 \cdot 10^{-8}.$$

III. Nach den im Vorstehenden entwickelten Resultaten können wir jedenfalls die Thatsache behaupten, dass im Kalkspath eine elastische Schiebung nahezu den kleinsten Widerstand findet, wenn sie parallel einer Gleitfläche stattfindet, dagegen einen nahe doppelt so grossen, wenn sie parallel einer unter  $45^\circ$

1) W. Voigt, l. c. p. 63.

gegen die Gleitfläche geneigten Ebene normal zur Symmetrieebene geschieht.

Diese Bemerkungen lassen es einleuchtend erscheinen, dass die mechanische Herstellung von Zwillingsslamellen im Kalkspath so besonders leicht und sicher von Statten geht.

Dagegen ist zu betonen, dass die Existenz solcher unter einander sehr abweichender Minima und Maxima des Gleitungswiderstandes für sich allein noch nicht ausreicht, um Gleitflächen theoretisch möglich zu machen, sonst müsste auch eine Ebene, nahe normal zur Gleitfläche durch die X-Symmetrieaxe gelegt, eine Gleitfläche sein können. Zunächst muss jedenfalls die rein geometrische Bedingung erfüllt sein, dass die Krystallform durch die Schiebung parallel der Gleitfläche in die Zwillingstellung übergeht; ausserdem aber muss die Moleculardrehung, welche die Schiebung begleitet, eine solche Grösse besitzen, dass bei einer gewissen Grösse der Schiebung alle verschobenen Theile im ganzen, wie in den einzelnen Molecülen nahezu eine mittlere Position zwischen der ursprünglichen und der Zwillingstellung einnehmen und daher bei gleichen Umständen ebenso leicht der ersteren wie der letzteren zustreben. Die Unwahrscheinlichkeit der Erfüllung dieser letzten Bedingung ist offenbar die Ursache des verhältnissmässig seltenen Vorkommens von Gleitflächen.

Geht man von der Thatsache aus, dass im Kalkspath eine Gleitfläche durch eine Symmetrieaxe und unter  $63^{\circ}45'$  gegen die Hauptaxe geneigt vorhanden ist, so kann man nach diesen Kriterien leicht erkennen, weshalb eine zu ihr nahe normale Ebene keine Gleitfläche sein kann, selbst wenn sie als eine mögliche Rhomboëderfläche die geometrische Bedingung erfüllt.

Legen wir die  $\Xi H$ -Ebene wie früher in die Gleitfläche; die  $+H$ -Axe in den Quadranten zwischen  $+Y$ - und  $-Z$ -Axe, so wird durch eine einfache Schiebung von der Grösse:

$$\omega = \zeta \operatorname{tg}(19^{\circ}8')$$

der Krystall in eine Lage gebracht, die in der Mitte liegt zwischen der ursprünglichen und der Zwillingstellung, welche letztere durch eine Schiebung:

$$\omega = 2 \zeta \operatorname{tg}(19^{\circ}8')$$

erreicht wird.

Damit dabei auch das einzelne Molecül in eine mittlere Lage zwischen der ursprünglichen und der Zwischenstellung gekommen ist, muss es sich um circa  $26^{\circ}15'$  in der Richtung von der  $+H$ - zur  $Z$ -Axe gedreht haben; denn die neue krystallographische Hauptaxe ist um  $52^{\circ}30'$  gegen die ursprüngliche in diesem Sinne geneigt.

Nun habe ich an anderer Stelle<sup>1)</sup> bewiesen, dass die Moleculardrehung  $l$  um die  $X$ -Axe bei bloss mechanischer Einwirkung für rhomboëdrische Krystalle dem Gesetz folgt:

$$(10) \quad l = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{q}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

worin  $q$  eine der Substanz des Krystalles individuelle Constante bezeichnet.

Von der Grösse von  $q$  können wir uns eine Vorstellung mit Hülfe der obigen Zahlen verschaffen, wenn wir die Formel, die im Grunde nur für kleine Winkel abgeleitet ist, als eine angenäherte auch für grössere benutzen, was unbedenklich ist, da es sich für uns nur um Vorzeichen und Grössenordnung handelt.

Es ist in der früheren Bezeichnung:

$$(11) \quad y = \eta c - \zeta s, \quad z = \eta s + \zeta c,$$

also, da nur eine Verschiebung  $\omega = k\zeta$  parallel der  $H$ -Axe stattfindet:

$$(12) \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -ks^2, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = +kc^2$$

und demgemäss:

$$(13) \quad l = -\frac{k}{2} (1 + q(c^2 - s^2)),$$

oder:

$$q = -\frac{k + 2l}{k(c^2 - s^2)}.$$

Setzt man die Werthe  $k = \text{tg}(19^{\circ}8')$  und  $l = 26^{\circ}15'$ , sowie den der Neigung der Gleitfläche entsprechenden Winkel für  $\varphi$  in  $c^2 - s^2$  ein, so erhält man als ungefähren Werth:

$$q = -6.$$

Die Formel (13) lautet demgemäss:

$$(14) \quad l = -\frac{k}{2} (1 - 6(c^2 - s^2)).$$

1) W. Voigt, l. c. p. 42.

und hieraus können wir nun die Moleculardrehung bei einer andern Schiebung in der Symmetrieebene, z. B. bei der parallel der zweiten Maximalebene, welche zur Gleitfläche nahe normal steht, berechnen.

Soll der Krystall demgemäss deformirt das Spiegelbild der ursprünglichen Form in Bezug auf jene Ebene zeigen, so müssen sich, da die neue Axe um  $52^{\circ}30'$  nach der positiven Seite von der alten abliegt, die einzelnen Molecüle bei der Schiebung um etwa ebenso viel nach der positiven Seite drehen, falls die betrachtete Fläche Gleitfläche sein soll. Nun ist hier aber, wie die Anschauung leicht lehrt,  $k$  positiv,  $c^2 - s^2$  aber negativ und daher die rechte Seite der Gleichung (14) jedenfalls negativ.

*Bei einer Schiebung der gedachten Art drehen sich daher die Molecüle gerade im entgegengesetzten Sinne, als zur Erreichung der Zwillingslage nöthig wäre. Jene zweite Ebene kleinsten Widerstandes kann hiernach also keine zweite Gleitfläche sein.*

Göttingen, im August 1889.

**XII. Ueber die durch einseitigen Druck hervorgerufene Doppelbrechung regulärer Krystalle, speciell von Steinsalz und Sylvin, von F. Pockels.**

**I. Allgemeine Bemerkungen über reguläre Krystalle.**

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> habe ich gezeigt, dass die durch elastische Deformationen bewirkten Aenderungen der Lichtgeschwindigkeit in regulären Krystallen von drei der Substanz eigenthümlichen Constanten abhängen. Werden diese Constanten mit  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{44}$  bezeichnet, so drücken sich diejenigen Grössen ( $B_{11}$ ,  $B_{22}$ ,  $B_{33}$ ,  $B_{23}$ ,  $B_{31}$ ,  $B_{12}$ ), welche das „Fresnel'sche Ovaloid“ im deformirten Krystall bestimmen, folgendermaassen durch die Deformationsgrössen  $x_x, \dots y_z, \dots$  aus<sup>2)</sup>:

$$(1) \quad \begin{cases} B_{11} - \omega^0{}^2 = (a_{11} - a_{12}) x_x + a_{12} \Delta, \\ B_{22} - \omega^0{}^2 = (a_{11} - a_{12}) y_y + a_{12} \Delta, \\ B_{33} - \omega^0{}^2 = (a_{11} - a_{12}) z_z + a_{12} \Delta, \\ B_{23} = a_{44} y_z, \quad B_{31} = a_{44} z_x, \quad B_{12} = a_{44} x_y, \end{cases}$$

wo  $\Delta = x_x + y_y + z_z$  ist und  $\omega^0$  die Lichtgeschwindigkeit im undeformirten Krystall bezeichnet.

Die Gleichung des Ovaloids, bezogen auf drei den Würfelnormalen parallele Coordinatenachsen  $x^0$ ,  $y^0$ ,  $z^0$ , ist diese:

$$\rho^2 = B_{11} \mu^0{}^2 + B_{22} \nu^0{}^2 + B_{33} \pi^0{}^2 + 2 B_{23} \nu^0 \pi^0 + 2 B_{31} \pi^0 \mu^0 + 2 B_{12} \mu^0 \nu^0,$$

wenn  $\rho$  den Radiusvector,  $\mu^0$ ,  $\nu^0$ ,  $\pi^0$  dessen Richtungscosinus bezeichnen. Formeln zur Berechnung der Grösse und Richtung der Haupttaxen des Ovaloids sind l. c. p. 153—157 entwickelt.

Im Folgenden soll nun nur die in regulären Krystallen durch elastische Deformationen erzeugte Doppelbrechung

1) F. Pockels, Wied. Ann. 37. p. 151 ff. 1889.

2) F. Pockels, l. c. p. 160.

ohne Berücksichtigung der absoluten Aenderungen der Lichtgeschwindigkeiten näher untersucht werden, was besonderes Interesse hat, weil bei regulären Krystallen die hier zu betrachtenden Verhältnisse (das heisst die Lagen der optischen Axen im Krystall) von der Grösse des Druckes ganz unabhängig sind.

Man erkennt leicht, dass diese Erscheinungen nur von den zwei Constanten  $(a_{11} - a_{12})$  und  $a_{44}$  abhängen; denn  $a_{12}A$  ist den drei Grössen  $B_{11} - \omega^2$ ,  $B_{22} - \omega^2$ ,  $B_{33} - \omega^2$  gemeinsam, hat also nur Einfluss auf die absoluten Geschwindigkeiten (wie eine Aenderung von  $\omega^0$ ). Die Grössen  $(a_{11} - a_{12})/2$  und  $a_{44}$  bestimmen die Stärke der Doppelbrechung für zwei Prismen, deren Längsaxen einer Würfel- bzw. einer Octaëdernormale parallel sind, und welche die gleiche Längs- und Querdilatation erlitten haben. Dies ergibt sich wie folgt.

Es sei erstens die Deformation symmetrisch in Bezug auf die  $z^0$ -Axe, d. h.  $z_z = \lambda_z$ ,  $x_x = y_y = \lambda_x$ ,  $y_z = z_x = x_y = 0$ ; dann ist klar, dass das optische Symmetriemaxensystem  $x, y, z$  mit dem krystallographischen  $x^0, y^0, z^0$  zusammenfällt, und es wird:

$$\omega_z^2 = B_{11} + \omega^2 = (a_{11} - a_{12})z_z + (\omega^2 + a_{12}A),$$

$$\omega_x^2 = \omega_y^2 = B_{22} + \omega^2 = (a_{11} - a_{12})x_x + (\omega^2 + a_{12}A);$$

folglich:

$$\omega_z^2 - \omega_x^2 = (a_{11} - a_{12})(\lambda_z - \lambda_x).$$

Ist zweitens dieselbe Deformation  $\lambda_z$ ,  $\lambda_x = \lambda_y$  vorhanden symmetrisch in Bezug auf eine Axe  $z$ , welche mit einer Octaëdernormale zusammenfällt, also bezogen auf das Coordinatensystem  $x^0, y^0, z^0$  etwa die Richtungscosinus  $\sqrt{3}/3$ ,  $\sqrt{3}/3$ ,  $\sqrt{3}/3$  besitzt, so ist:

$$x_x = y_y = z_z = \frac{\lambda_z + 2\lambda_x}{3}, \quad y_z = z_x = x_y = \frac{2}{3}(\lambda_z - \lambda_x);$$

$$B_{11} - \omega'^2 = B_{22} - \omega'^2 = B_{33} - \omega'^2 = (a_{11} - a_{12}) \cdot \frac{\lambda_z + 2\lambda_x}{3},$$

$$B_{23} = B_{31} = B_{12} = a_{44} \cdot \frac{2(\lambda_z - \lambda_x)}{3},$$

worin  $\omega'^2 = \omega^2 + a_{12}A$  ist. Ferner findet man leicht:

$$\omega_z^2 = B_{11} + 2B_{23}, \quad \omega_x^2 = \omega_y^2 = B_{11} - B_{23},$$

folglich:

$$\omega_z^2 - \omega_x^2 = 3B_{23} = 2a_{44}(\lambda_z - \lambda_x).$$



Die demselben Werthe  $\lambda_x - \lambda_z$  entsprechenden Differenzen  $\omega_x^2 - \omega_z^2$  (oder  $\omega_x - \omega_z$ ) verhalten sich also in den beiden betrachteten Fällen in der That wie  $\frac{1}{2}(a_{11} - a_{12})$  zu  $a_{44}$ . — Die auf diese Weise physikalisch gedeuteten Constanten  $\frac{1}{2}(a_{11} - a_{12})$  und  $a_{44}$  sind natürlich bei isotropen Körpern einander gleich, bei regulär krystallisirenden aber können sie, wie die Erfahrung gezeigt hat, nicht nur sehr von einander verschieden sein, sondern sogar entgegengesetztes Vorzeichen haben. Von diesen Constanten hängen in einfacher Weise die Erscheinungen ab, welche man erhielte, wenn man verschieden orientirte Krystallprismen *in gleicher Weise deformiren* würde. Da man nun aber praktisch dies kaum realisiren, sondern nur diejenigen homogenen Deformationen bequem herstellen kann, welche durch einseitigen Druck erzeugt werden, so ist es zweckmässiger, die Discussion in der Weise durchzuführen, dass man die durch einen constanten einseitigen Druck, dessen Richtung man alle möglichen Lagen im Krystall annehmen lässt, erzeugte Doppelbrechung verfolgt. Diese Art der Discussion soll daher hier gewählt werden, obwohl die zuerst angedeutete vielleicht von grösserem theoretischen Interesse wäre.

Bekanntlich drücken sich für reguläre Krystalle die Deformationen  $x_z, \dots y_z, \dots$  folgendermaassen durch die Druckkräfte  $X_z, \dots Y_z, \dots$  aus:

$$\begin{aligned} -x_z &= (s_{11} - s_{12}) X_x + s_{12} (X_x + Y_y + Z_z), \\ -y_z &= (s_{11} - s_{12}) Y_y + s_{12} (X_x + Y_y + Z_z), \\ -z_z &= (s_{11} - s_{12}) Z_z + s_{12} (X_x + Y_y + Z_z), \\ -y_z &= s_{44} Y_z, \quad -z_x = s_{44} Z_x, \quad -x_y = s_{44} X_y. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in die obigen Ausdrücke für  $B_{11}, \dots B_{23}, \dots$  erhält man:

$$(2) \quad \begin{cases} B_{11} - \omega^2 = -(a_{11} - a_{12})(s_{11} - s_{12}) X_x - (a_{11} s_{12} + a_{12}(s_{11} + s_{12}))(X_x + Y_y + Z_z), \\ B_{22} - \omega^2 = -(a_{11} - a_{12})(s_{11} - s_{12}) Y_y - (a_{11} s_{12} + a_{12}(s_{11} + s_{12}))(X_x + Y_y + Z_z), \\ B_{33} - \omega^2 = -(a_{11} - a_{12})(s_{11} - s_{12}) Z_z - (a_{11} s_{12} + a_{12}(s_{11} + s_{12}))(X_x + Y_y + Z_z), \\ B_{23} = -a_{44} s_{44} Y_z, \\ B_{31} = -a_{44} s_{44} Z_x, \\ B_{12} = -a_{44} s_{44} X_y. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, dass, wenn man  $X_2, \dots Y_2, \dots$  als direct gegeben ansieht, die Erscheinungen der Doppelbrechung lediglich von den Producten aus den Constanten  $a_{11} - a_{12}$  resp.  $a_{44}$  und den Elasticitätsconstanten  $s_{11} - s_{12}$  resp.  $s_{44}$  abhängen. Es werde zur Abkürzung gesetzt:

$$(a_{11} - a_{12})(s_{11} - s_{12}) = a, \quad a_{44}s_{44} = b.$$

(Für isotrope Körper ist  $s_{44} = 2(s_{11} - s_{12})$ , also  $a = b$ ).

Ist die Richtung des einseitigen Druckes (oder Zuges) gegeben, so sind  $X_2, \dots Y_2, \dots$  bis auf einen constanten gemeinsamen Factor  $p$  bekannt; die vorhergehenden Formeln zeigen daher, dass dann die Lage der Hauptaxen des Ovaloids und das Verhältniss ihrer Grössen zu einander, *mithin auch die Lage der optischen Axen im Krystall, allein von dem Verhältniss  $b:a$  abhängt*. Um also die eigenthümlichen Verhältnisse, welche bei regulären, durch einseitigen Druck oder Zug doppeltbrechend gemachten Krystallen auftreten können, vollständig zu übersehen, braucht man nur den Quotienten  $b/a$  als variabel zu betrachten; denn alle Unterschiede, welche durch verschiedene absolute Grösse oder verschiedenes Vorzeichen der entsprechenden Constanten  $a$  und  $b$  bei verschiedenen Substanzen bedingt sind, lassen sich durch geeignete Aenderung der Grösse des einseitigen Druckes, resp. durch Ersetzung desselben durch Zug aufheben. (Damit soll natürlich nicht gesagt sein, dass die absoluten Werthe von  $a$  und  $b$  nicht auch von erheblichem physikalischem Interesse sind.) Hinsichtlich des Werthes von  $b/a$  sind nun 4 Fälle zu unterscheiden:

$$\text{I.} \quad +1 < \frac{b}{a} < +\infty, \quad \text{II.} \quad 0 < \frac{b}{a} < +1,$$

$$\text{III.} \quad -1 < \frac{b}{a} < 0, \quad \text{IV.} \quad -\infty < \frac{b}{a} < -1.$$

Es ist merkwürdig, dass die bisher untersuchten regulär krystallisirten Substanzen 3 verschiedene von diesen Fällen repräsentiren, nämlich Steinsalz (und  $\text{NaClO}_3$ ) den II., Sylvin den IV., Flussspath den III.; nur für den Fall I ist noch kein Vertreter gefunden.

Es sei hier noch bemerkt, dass das Vorzeichen von  $b/a$  stets dasselbe ist, wie dasjenige des Quotienten  $2a_{44}/(a_{11} - a_{12})$ ,

durch welchen sich bei gegebener Dilatation in einer Richtung die Lage der optischen Axen ganz ebenso bestimmt, wie durch  $b/a$  bei gegebenem einseitigem Druck.

Der Uebersichtlichkeit wegen soll bei der Discussion die Druckrichtung auf die Symmetrieebenen des regulären Krystalls, also auf eine Würfel- und eine Rhombendodekaëderfläche, beschränkt werden. Die im ersten Octanten des  $X^0 Y^0 Z^0$ -Coordinatensystems liegende Octaëdernormale werde mit  $O$ , die im ersten Quadranten der  $X^0 Y^0$ -Ebene liegende Dodekaëdernormale mit  $D$  bezeichnet. Dann handelt es sich um die Bestimmung der Lage der optischen Axen  $A_1, A_2$ , wenn die Druckrichtung  $P$  sich bewegt

1. in der  $X^0 Y^0$ -Ebene zwischen  $+X^0$  und  $D$ ,
2. „ „ Ebene  $Z^0 D$  „  $+Z^0$  und  $O$ ,
3. „ „ „ „ „  $O$  und  $D$ .

Zur Veranschaulichung kann man die in Betracht kommenden Richtungen durch Punkte auf der Kugelfläche darstellen und letztere in stereographischer Projection zeichnen. In dieser Weise sind die beigegebenen Figuren p. 449, 450, 452 für Steinsalz, Sylvin und Flussspath entworfen.

Erläuterungen zu den Figuren. — Als Projectionspunkt auf der Kugel ist der Endpunkt einer Rhombendodekaëdernormale gewählt; der die Figuren begrenzende Kreis (Aequator der Kugel) entspricht demnach einer Dodekaëderfläche. Wo der Projectionspunkt einer Richtung aus dem Inneren des Kreises (welches der einen Halbkugel entspricht) hinausgefallen wäre, ist die betreffende Richtung durch ihre entgegengesetzte ersetzt (so z. B. in Fig. 3 die eine Axe (1)). — Dargestellt sind die optischen Axen und Mittellinien für Druckrichtungen, welche auf den Geraden  $X^0 Y^0$  (Würfel- und  $Z^0 D$  (Dodekaëderfläche) liegen; wo jedoch für letztere die optischen Axen in die Symmetrieebene ( $Z^0 D$ ) fallen, sind der Uebersichtlichkeit halber alle Punkte auf dem Aequatorkreise gezeichnet, welcher ja auch einer Dodekaëderfläche entspricht. Dies gilt für Druckrichtungen zwischen  $D$  und  $O$  bei Fig. 1, zwischen  $Z^0$  und  $O$  bei Fig. 2 und 3. Die Druckrichtungen sind durch Kreuze ( $\times$ ), die optischen Axen durch Kreise ( $\circ$ ), die Mittellinien

durch einfache Querstriche (1) bezeichnet. Die beigeschriebenen Zahlen bedeuten, mit 10 multiplicirt, den die Druckrichtung bestimmenden Winkel  $\varphi$  bzw.  $\chi$  in Graden; für Druckrichtungen in  $Z^0D$  sind sie mit einem Index ' versehen. Die gestrichelten Kreisbögen stellen die optische Axenebene dar, wo dieselbe senkrecht zur Symmetrieebene ist; die punktierten geraden Linien sollen in diesen Fällen nur die Zusammengehörigkeit der Druckrichtung und der entsprechenden Axenrichtungen deutlicher machen. Die dick ausgezogenen Curven sind diejenigen Curven, welche von den Axenpunkten durchlaufen werden, wenn sich die Druckrichtung in den bezeichneten Intervallen bewegt (bei Fig. 1 von  $X_0$  bis  $Y_0$  und von  $Z_0$  bis  $O$ , bei Fig. 2 von  $X_0$  bis  $D$  und  $O$  bis  $D$ , bei Fig. 3 von  $O$  bis  $D$ ). Die Axenpunkte, welche der Druckrichtung  $D$  entsprechen, sind durch den Buchstaben  $D$  ausgezeichnet.

Discussion.— Es sind nun die Formeln zur Berechnung der Lage der optischen Axen für die soeben angegebenen Lagen der Druckrichtung aufzustellen. Es handelt sich, da in jenen 3 Fällen eine optische Symmetrieaxe aus Symmetrierück-sichten von vornherein bekannt ist, nur um die Bestimmung eines Winkels zur Festlegung der 2 anderen Symmetrieaxen und um diejenige des optischen Axenwinkels.

1. Die im ersten Quadranten der  $X^0Y^0$ -Ebene liegende Druckrichtung  $P$  bilde mit  $+X^0$  den Winkel  $\varphi$ , welcher auf das Intervall von 0 bis  $\pi/4$  beschränkt werden kann; gesucht ist zunächst der Winkel  $(X^0X) = \psi$ , zu dessen Berechnung die Formel dient<sup>1)</sup>:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2B_{12}}{B_{11} - B_{22}}.$$

Es ergibt sich leicht<sup>2)</sup>:

$$\begin{aligned} X_z &= p \cos^2 \varphi, & Y_y &= p \sin^2 \varphi, & X_y &= \frac{1}{2} p \sin 2\varphi, \\ Z_z &= Z_x = Y_z = 0, \end{aligned}$$

wo  $p$  den ausgeübten Druck bezeichnet.

Folglich wird nach (2), wenn  $a_{11}s_{12} + a_{12}(s_{11} + s_{12}) = c$  gesetzt wird:

1) F. Pockels, l. c. p. 156, Formel (14), wo  $\Phi_z = \psi$ .

2) F. Pockels, l. c. p. 270 unten.

$$B_{11} - \omega^2 = -p \{ a \cos^2 \varphi + c \},$$

$$B_{22} - \omega^2 = -p \{ a \sin^2 \varphi + c \},$$

$$B_{33} - \omega^2 = -p c,$$

$$B_{23} = B_{31} = 0, \quad B_{12} = -\frac{1}{2} p b \sin 2\varphi.$$

Demnach wird:

$$(3) \quad \operatorname{tg} 2\psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} 2\varphi,$$

$$\text{ferner}^1): \quad \omega_x^2 = B_{11} \cos^2 \psi + B_{22} \sin^2 \psi + B_{12} \sin 2\psi,$$

$$\omega_y^2 = B_{11} \sin^2 \psi + B_{22} \cos^2 \psi - B_{12} \sin 2\psi,$$

$$\omega_z^2 = B_{33},$$

$$(4) \quad \begin{cases} \omega_y^2 - \omega_x^2 = (B_{22} - B_{11}) \cos 2\psi - 2B_{12} \sin 2\psi = (B_{22} - B_{11}) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi} \\ \quad = + p \sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi}, \\ \omega_y^2 - \omega_z^2 = -\frac{1}{2} p \{ a - \sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi} \}, \\ \omega_x^2 - \omega_z^2 = -\frac{1}{2} p \{ a + \sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi} \}; \end{cases}$$

hierin ist der Quadratwurzel immer das Vorzeichen von  $a$  beizulegen.

2. und 3. Der Winkel  $\widehat{Z^0P}$  werde mit  $\chi$  bezeichnet;  $\chi$  liegt im Falle 2) zwischen  $0^\circ$  und  $54^\circ 44'$ , im Falle 3) zwischen  $54^\circ 44'$  und  $90^\circ$ . Diejenige optische Symmetrieaxe, welche in der Ebene  $Z^0D$  liegt und im normalen Falle, d. h. bei positivem  $b/a$ , für  $\chi = 0$  in die  $Z^0$ -Axe, bei negativem in die  $Y^0$ -Axe fällt, werde mit  $Z$  und ihr Winkel gegen  $Z^0$  mit  $\vartheta$  bezeichnet<sup>2)</sup>; letzterer kann alle Werthe zwischen  $0$  und  $180^\circ$  (oder  $+90^\circ$  und  $-90^\circ$ ) annehmen. Die zu der die Richtungen  $Z^0, O, D, P$  enthaltenden Ebene senkrechte optische Symmetrieaxe, welche also eine Dodekaëdernormale ist, sei die  $X$ -Axe.

Es ist zunächst:

$$X_x = Y_y = X_y = p \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \chi, \quad Y_z = Z_x = p \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \sin \chi \cos \chi, \\ Z_z = p \cos^2 \chi;$$

$$\text{folglich: } B_{11} - \omega^2 = B_{22} - \omega^2 = -p \{ \frac{1}{2} a \sin^2 \chi + c \},$$

$$B_{33} - \omega^2 = -p \{ a \cos^2 \chi + c \},$$

$$B_{23} = B_{31} = -p \sqrt{\frac{1}{2}} b \sin \chi \cos \chi, \quad B_{12} = -p \cdot \frac{1}{2} b \sin^2 \chi.$$

1) Nach den Gl. (11), l. c. p. 154.

2) Diese Festsetzung hat den Zweck, dass man dieselben Formeln für  $\vartheta$  etc. in allen Fällen anwenden kann; die frühere Festsetzung, nach welcher die  $X, Y, Z$ -Axe bei Aufhebung des Druckes stetig in die gleichnamigen Axen mit Index  $^0$  übergehen sollten, kann natürlich bei regulären Krystallen nicht aufrecht erhalten werden.

Zur Bestimmung des Winkels  $\vartheta$  erhält man aus der ersten der Gl. (6) meiner früheren Arbeit<sup>1)</sup> folgende Gleichung:

$$(5) \quad \operatorname{tg} 2 \vartheta = \frac{2 \sqrt{2} B_{33}}{B_{33} - B_{11} - B_{12}} = \frac{4b \sin 2\chi}{a - b + (3a + b) \cos 2\chi}.$$

Für  $\chi = 54^\circ 44'$  ergibt dies unabhängig von dem Werthe von  $b/a$   $\operatorname{tg} 2 \vartheta = -2\sqrt{2}$ , d. h.  $\vartheta = 54^\circ 44'$ , wie es sein muss.

Weiter erhält man (aus den Gl. 11 a. a. O.):

$$(6) \quad \begin{cases} \omega_y^2 - \omega_z^2 = (B_{11} - B_{33} + B_{12}) \cos 2\vartheta - 2\sqrt{2} B_{23} \sin 2\vartheta \\ \quad = p b \frac{\sin 2\chi}{\sin 2\vartheta}, \\ \omega_x^2 - \omega_z^2 = (B_{11} - B_{33}) \cos^2 \vartheta - B_{23} \sqrt{2} \sin 2\vartheta - B_{12} (1 + \cos^2 \vartheta) \\ \quad = \frac{1}{2} p \left\{ b \frac{\sin 2\chi}{\sin 2\vartheta} + \frac{a + 3b}{4} + \frac{3(a-b)}{4} \cos 2\chi \right\} = p b \frac{\sin \chi}{\sin \vartheta} \cos (\chi - \vartheta), \\ \omega_y^2 - \omega_x^2 = p b \frac{\sin \chi}{\cos \vartheta} \sin (\vartheta - \chi). \end{cases}$$

Nunmehr soll zur gesonderten Discussion der Fälle I—IV übergegangen werden.

$$\text{I. } \frac{b}{a} > +1.$$

1. Liegt die Druckrichtung  $P$  in der  $X^0 Y^0$ -Ebene (Würfel­fläche), so ist nach Gl. (3)  $\operatorname{tg} 2\psi > \operatorname{tg} 2\varphi$ , also liegt die  $X$ -Axe zwischen  $P$  und der Dodekaedernormale  $D$ , mit welcher letzteren sie für  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  zusammenfällt. Ferner geht aus den Formeln (4) hervor, dass dem absoluten Betrage nach

$$|\omega_y^2 - \omega_x^2| > |\omega_z^2 - \omega_x^2| > |\omega_y^2 - \omega_z^2|$$

ist, dass also die Ebene der optischen Axen in die  $X^0 Y^0$ -Ebene fällt und die  $X$ -Axe die erste Mittellinie ist; der Winkel zwischen letzterer und den optischen Axen ist bestimmt durch:

$$\sin^2 \Omega = \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi} - a}{2 \sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi}} = \frac{\cos 2\varphi - \cos 2\psi}{2 \cos 2\varphi}.$$

Das Maximum von  $\sin^2 \Omega$  tritt ein für  $\varphi = 45^\circ$  und ist  $= (b - a)/2b$ .

2. Für  $0 < \chi < 54^\circ 44'$  durchläuft  $\vartheta$  denselben Winkelraum und ist dabei immer  $> \chi$ , ausser in den Grenzen; es ist zufolge der Formeln (6):

1) F. Pockels, l. c. p. 153.

$\omega_y^2 > \omega_x^2 > \omega_z^2$ , wenn  $pb$  positiv angenommen wird; folglich liegen die optischen Axen in der Symmetrieebene und ihre Winkel gegen die  $Z$ -Axe (erste Mittellinie) sind gegeben durch  $\sin^2 \Omega = (\sin \vartheta \sin(\vartheta - \chi)) / \cos \chi$ . Der Axenwinkel erreicht ein gewisses Maximum und wird für  $\chi = 54^\circ 44'$  wieder gleich Null.

3. Für  $54^\circ 44' < \chi < 90^\circ$  ist  $\vartheta < \chi$ ,  $\omega_x^2 > \omega_y^2 > \omega_z^2$ , die Axenebene ist senkrecht zur Symmetrieebene, und der Axenwinkel um die  $Z$ -Axe gegeben durch:

$$\sin^2 \Omega = \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg}(\chi - \vartheta);$$

derselbe nimmt zu bis zu dem oben bestimmten Maximalwerth für  $\chi = 90^\circ$ . (Vorstehende Formel liefert dafür den unbestimmten Ausdruck  $\frac{\infty}{\infty}$ ).

$$\text{II. } 0 < \frac{b}{a} < +1.$$

1. Es ist  $\psi = 0$  für  $q = 0$ ,  $\psi = 45^\circ$  für  $q = 45^\circ$ , sonst immer  $\psi < q$ ; die  $X$ -Axe liegt also zwischen der Druckrichtung und der nächstliegenden Würfelnormale. Ferner ist, wenn  $pa$  positiv angenommen wird:

$$\omega_x^2 > \omega_y^2 > \omega_z^2,$$

folglich ist die optische Axenebene senkrecht zur Ebene  $X^0 Y^0$ , und der Axenwinkel  $2\Omega$  um die  $X$ -Axe ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \sin^2 \Omega &= \frac{a - \sqrt{a^2 \cos^2 2q + b^2 \sin^2 2q}}{a + \sqrt{a^2 \cos^2 2q + b^2 \sin^2 2q}} = \frac{\cos 2\psi - \cos 2q}{\cos 2\psi + \cos 2q} \\ &= \operatorname{tg}(q + \psi) \operatorname{tg}(q - \psi). \end{aligned}$$

Lässt man  $q$  von 0 bis  $45^\circ$  wachsen, so wächst der Axenwinkel ebenfalls beständig und erreicht für  $q = 45^\circ$  seinen grössten Werth, welcher bestimmt ist durch

$$\sin^2 \Omega' = \frac{a-b}{a+b}$$

und  $\leq 90^\circ$  ist, je nachdem  $a \leq 3b$  ist.

$\psi$  wächst erst langsamer, dann rascher als  $q$ , und es erreicht daher die Abweichung  $q - \psi = \Phi$  der Mittellinie  $X$  von der Druckrichtung  $P$  ein Maximum  $\Phi'$  für einen bestimmten Winkel  $q'$ , welcher der Gleichung  $\operatorname{tg} 2q' = \sqrt{a/b}$  genügt; der zugehörige Werth von  $\psi$  folgt aus  $\operatorname{tg} 2\psi' = \sqrt{b/a}$ , somit ist:

$$\Phi' = 2q' - 45^\circ = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right) - 45^\circ.$$

Für Steinsalz ist nach den unten mitgetheilten Beobachtungen  $b/a = +0,704$ , und es ergibt sich daher  $\Omega' = 24^\circ 40'$ ,  $\varphi' = 25^\circ 0'$ ,  $\Phi' = 5^\circ 0'$ . Für sehr kleine Werthe von  $\varphi$  ist, da  $b/a$  nahe  $= 1/2$ , sehr annähernd  $\Omega = \psi$ , wie dies in Fig. 1 ersichtlich ist.

2. Für  $0 < \chi < 54^\circ 44'$  ist  $\vartheta < \chi$ , also,  $pb$  positiv vorausgesetzt,  $\omega_x^2 > \omega_y^2 > \omega_z^2$ . Demnach ist die optische Axenebene senkrecht zur Ebene  $Z^0D$  und der Axenwinkel um die  $Z$ -Axe, welche zwischen  $P$  und  $Z^0$  liegt, zu berechnen nach der Formel:

$$\sin^2 \Omega = \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} (\chi - \vartheta).$$

Der letztere erreicht ein Maximum  $2\Omega''$  für den durch

$$\cos 2\chi'' = \frac{3b - a}{3b + a}$$

bestimmten Werth von  $\chi$ ; für Steinsalz findet sich:

$$\chi'' = 38^\circ 43', \quad \Omega'' = 14^\circ 0'.$$

Die Abweichung  $\chi - \vartheta = \Phi$  ist am grössten für:

$$\cos 2\chi = \frac{b - 3a - \sqrt{(14b)^2 + 96ab}}{3(5b + 3a)},$$

woraus sich für Steinsalz der Werth  $\chi = \chi_1''' = 28^\circ 39'$  ergibt; der zugehörige Maximalwerth von  $\Phi$  ist  $\Phi_1''' = 5^\circ 43'$ . Zu erwähnen ist endlich noch, dass  $\partial \sin \Omega / \partial \chi$  für  $\chi = \vartheta = 54^\circ 44'$  unendlich gross wird, sodass die Curve, welche die optischen Axen auf der Kugel durchlaufen, im Punkte  $O$  die Symmetrieebene  $Z^0D$  senkrecht trifft.

3. Für die Lagen von  $P$  zwischen  $O$  und  $D$  ist:

$$\vartheta > \chi, \quad \omega_y^2 > \omega_x^2 > \omega_z^2, \quad \sin^2 \Omega = \frac{\sin \vartheta \sin (\vartheta - \chi)}{\cos \chi},$$

und die optischen Axen liegen in der Ebene  $Z^0D$ ;  $\Omega$  wächst bis zu dem schon oben berechneten Maximum, welches eintritt, wenn  $P$  mit  $D$  zusammenfällt. Anfangs, d. h. wenn

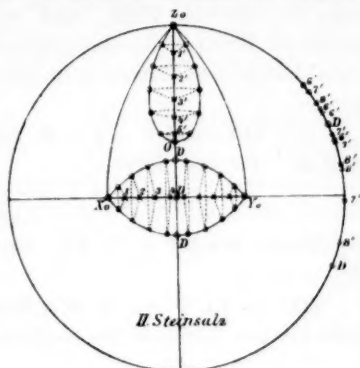


Fig. 1.



sich  $P$  von  $O$  entfernt, wächst  $\Omega$  ausserordentlich schnell, da wieder  $\partial \sin \Omega / \partial \chi$  unendlich gross wird. Dies gilt übrigens für alle vier Fälle; man würde daher in Praxi einen regulären Krystall durch Compression in der Richtung einer Octaëdernormale niemals vollkommen optisch einaxig machen können.

Die Differenz  $\vartheta - \chi = \Phi$  erreicht ihren grössten Betrag  $\Phi_2'''$  für den durch

$$\cos 2\chi = \frac{b - 3a + \sqrt{(14b)^2 + 96ab}}{3(5b + 3a)}$$

gegebenen Winkel  $\chi_2'''$ . Für Steinsalz wird  $\chi_2''' = 70^\circ 24'$ ,  $\Phi_2''' = 2^\circ 17'$ .

III.  $-1 < b/a < 0$ . Repräsentant Flussspath, für den nach meinen früheren Beobachtungen<sup>1)</sup>  $b/a = -0,482$  ist.

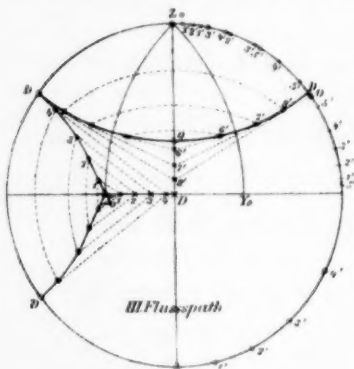


Fig. 2.

1. Während  $q$  die Werthe 0 bis  $+45^\circ$  durchläuft, nimmt  $\psi$  diejenigen von 0 bis  $-45^\circ$  an, und zwar ist dabei  $-\psi \leq q$ . Für  $q = 0$  fällt die  $X$ -Axe, für  $q = 45^\circ$  aber die  $Y$ -Axe mit der Druckrichtung zusammen; die Auslöschungsschiefe in einem parallel seiner Längsaxe comprimierten Prisma kann je nach der Lage der letzteren zwischen  $X^0$  und  $D$  alle möglichen

Grössen haben. (Dasselbe gilt für den Typus IV).

Da in den Formeln (4) nur das Quadrat von  $b/a$  vorkommt, so ist ebenso wie beim Typus II die Axenebene senkrecht zur  $X^0 Y^0$ -Ebene und der Axenwinkel gegeben durch  $\sin^2 \Omega = \operatorname{tg}(q + \psi) \operatorname{tg}(q - \psi)$ .

Aus dem soeben beschriebenen Verhalten von  $\psi$  geht aber hervor, dass, wenn  $P$  in die Dodekaëdernormale  $D$  fällt, die Ebene der optischen Axen senkrecht zur Druckrichtung ist. Der Axenwinkel um die  $X$ -Axe ist für diesen Fall ge-

1) F. Pockels, l. c. p. 385.

geben durch  $\sin^2 \Omega' = (a + b)/(a - b)$ , was aus dem unter II. 1. angegebenen Ausdrucke für  $\sin^2 \Omega$  folgt, wenn man berücksichtigt, dass der Quadratwurzel stets das Vorzeichen von  $a$  beizulegen ist, und dass jetzt  $b$  das entgegengesetzte Vorzeichen hat.

$\Omega'$  kann sowohl  $< 45^\circ$  als  $> 45^\circ$  sein; für Flussspath findet man den Werth  $36^\circ 12'$ . Es ist ferner  $-\partial \sin \Omega / \partial \psi' = 1,69$  für  $q = 0$ ,  $= 0$  für  $q = 45^\circ$ ; die der Druckrichtung und den optischen Axen entsprechenden Punkte der Kugel- fläche bilden für sehr kleine Winkel  $q$  nahezu ein gleich- seitiges Dreieck mit  $X^0$  als Mittelpunkt.

2. Die Formel (5) lehrt, dass  $\vartheta$  von  $90^\circ$  bis  $54^\circ 44'$  abnimmt, während  $\chi$  von 0 bis zu letzterem Werthe wächst; demzufolge ist  $Z$  anfangs senkrecht zu  $Z^0$  (fällt also mit  $D$  zusammen) und bewegt sich in entgegengesetzter Richtung wie  $P$  und zwar langsamer, sodass  $90^\circ - \vartheta$  stets  $< \chi$  ist. Die drei Ausdrücke (6)' haben gleiches Vorzeichen, folglich ist  $\omega_z$  die mittlere Hauptlichtgeschwindigkeit, und die optischen Axen liegen in der Symmetrieebene. Der halbe Axen- winkel um die  $Z$ -Axe ist

$$\Omega = \arcsin \sqrt{\frac{\sin \vartheta \cdot \sin (\vartheta - \chi)}{\cos \chi}}$$

und nimmt von  $90^\circ$  bis  $0^\circ$  ab, während  $\chi$  von 0 bis  $54^\circ 44'$  wächst. Dies bedeutet, dass der Krystall für  $\chi = 0$  negativ, für  $\chi = 54^\circ 44'$  positiv einaxig wird, oder umgekehrt.

3. Wenn  $\chi$  weiter wächst bis  $90^\circ$ , nimmt  $\vartheta$  von  $54^\circ 44'$  bis 0 ab, ändert sich jetzt also schneller als  $\chi$ . Die mittlere Geschwindigkeit ist jetzt  $\omega_y$ , folglich die Axenebene senk- recht zur  $Z^0 D$  Ebene und, unter  $2\Omega$  den Axenwinkel um  $Z$  verstanden,  $\sin^2 \Omega = \tan \vartheta \tan (\chi - \vartheta)$ ;  $\Omega$  nimmt also zu von 0 bis zu dem Werthe  $\arcsin \sqrt{2b/(b-a)}$ , welcher das Comple- ment von  $\Omega'$  ist.  $\partial \sin \Omega / \partial \vartheta$  ist  $= -\infty$  für  $\chi = 54^\circ 44'$   $= 0$  für  $\chi = 90^\circ$ . Die beiden Curvenäste, welche auf der Kugel den geometrischen Ort der optischen Axen vorstellen, treffen also den grössten Kreis, dessen Pol  $D$  ist, beide senk- recht in einem Punkte mit gemeinsamer Tangente.

IV.  $b/a < -1$ . Repräsentant dieses Typus ist Sylvin; denn für diese Substanz ist nach den unten angeführten Beobachtungen  $b/a = -2,525$ .

1. Hinsichtlich des Winkels  $\psi$  gilt dasselbe, wie im Falle III. 1, nur ist jetzt  $90^\circ - \psi < q$ . Von den drei Grössen  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  ist hier  $\omega_z$  die mittlere, es ist also, wie im Falle I. 1, die Axenebene die  $X^0Y^0$ -Ebene und

$$\sin^2 \Omega = \frac{\cos 2q - \cos 2\psi}{2 \cos 2q} \quad \text{oder} \quad \cos 2\Omega = \frac{\cos 2\psi}{\cos 2q};$$

der für  $q = 45^\circ$  erreichte Maximalwerth von  $\Omega$  ist gegeben durch:

$$\sin^2 \Omega' = \frac{b+a}{2b}, \quad (\text{woraus für Sylvin folgt } \Omega' = 33^\circ 23').$$

$$\frac{\partial \sin \Omega}{\partial \psi} \text{ ist } = 0 \text{ für } q = 45^\circ, \text{ endlich für } q = 0.$$

2. und 3. Wie in III 2. nimmt  $\vartheta$  zunächst von  $90^\circ$  aus ab, während  $\chi$  von  $0^\circ$  an wächst. Hier geht diese Abnahme

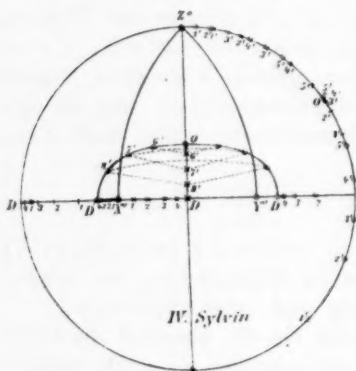


Fig. 3.

von  $\vartheta$  aber nicht, wie im vorigen Falle, bis zu  $0$ ; denn für  $\chi = 90^\circ$  wird wegen des negativen Vorzeichens von  $-b/(a+b)$  wieder  $\vartheta = 90^\circ$ ; demnach muss  $\vartheta$  ein Minimum erreichen und dann wieder zunehmen. Der Winkel  $\chi''$ , für welchen dieses Minimum eintritt, bestimmt sich aus

$$\cos 2\chi'' = \frac{b+3a}{b-a}$$

und ist  $\leq 45^\circ$ , je nachdem  $-b/a \geq 3$  ist, und  $\leq 54^\circ 44'$ , je nachdem  $-b/a \geq 2$  ist; der kleinste Werth von  $\vartheta$  selbst ist

$$\vartheta' = \frac{1}{2} \arctg \left\{ \frac{-b/2}{\sqrt{-a(a+b)}} \right\}.$$

In dem speciellen Falle  $b = -2a$  würde der Umkehrpunkt von  $Z$  gerade in  $O$  fallen; in jedem anderen Falle geht  $Z$  über  $O$  hinaus, da  $\vartheta'' < 54^\circ 44'$  ist.

Für Sylvin findet sich  $\chi'' = 48^\circ 48'$ ,  $\vartheta'' = 54^\circ 32'$ .

Es ist stets

$$\vartheta > \chi \text{ für } 0 < \chi < 54^\circ 44', \quad \vartheta < \chi \text{ für } 54^\circ 44' < \chi < 90^\circ;$$

daher gilt in Bezug auf die Lage der optischen Axen dasselbe, wie beim Typus I, d. h. es ist

für  $0 < \chi < 54^{\circ} 44'$  die Axenebene  $\parallel Z^0 D$  und

$$\sin^2 \Omega = \frac{\sin \vartheta \sin (\vartheta - \chi)}{\cos \chi},$$

für  $54^{\circ} 44' < \chi < 90^{\circ}$  die Axenebene  $\perp Z^0 D$  und

$$\sin^2 \Omega = \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} (\chi - \vartheta),$$

wo  $\Omega$  den halben Axenwinkel um die  $Z$ -Axe bedeutet; derselbe ergibt sich für  $\chi = 0$  gleich  $90^{\circ}$  aus demselben Grunde wie im Falle III. Der Maximalwerth von  $\Omega$  für  $\chi = 90^{\circ}$  ist das Complement von  $\Omega' = \arcsin \sqrt{(b+a)/2b}$  und somit stets  $> 45^{\circ}$ . Ein in der Richtung  $D$  ausgeübter Druck macht also einen Krystall dieses Typus in der Weise optisch zweiaxig, dass die Axen in der durch  $D$  gehenden Würfel-  
fläche liegen und  $D$  die zweite Mittellinie wird. In dem Grenzfalle  $b = -a$  würde dabei der Axenwinkel  $= 0$ , also der Krystall einaxig mit zur Druckrichtung senkrechter optischer Axe werden.

Es sei noch einmal hervorgehoben, dass hier, wie beim Typus III, ein Druck parallel der Würfelnormale und ein gleicher parallel der Octaëdernormale ausgeübt Doppelbrechung von entgegengesetztem Sinne erzeugen, und dass dasselbe gilt, wenn in jenen beiden Richtungen nicht ein gleicher Druck, sondern eine gleiche Dilatation hervor-  
gebracht wird.

## II. Beobachtungen an Steinsalz und Sylvin.

Die Beobachtungen wurden mit demselben Apparat und genau in derselben Weise angestellt, wie die früheren an Quarz und Flusspath.<sup>1)</sup> Nur mussten hier wegen der Zerbrechlichkeit und Weichheit des Materials erheblich kleinere Drucke angewandt und zur Ausgleichung des Druckes statt der Zinnplatten solche von Blei bzw. beim Sylvin von Gummi benutzt werden. Ferner wurde, da meistens mehrere Prismen von jeder Gattung vorhanden waren, an jedem Prisma nur bei einer Aufstellung, beim Steinsalz auch nur bei einer

1) F. Pockels, l. c. p. 164 ff.

Belastung beobachtet. Dass auch bei letzterem die relative Verzögerung dem Drucke sehr annähernd proportional war, wurde durch einige besondere Versuche constatirt. Die Beobachtungen wurden auch diesmal, wo nichts anderes bemerkt ist, mit Natriumlicht ausgeführt. Die Bezeichnungen und die Einrichtung der Tabellen, welche die relative Verzögerung in Umdrehungen der Compensatorschraube ausgedrückt angeben, sind ebenfalls dieselben, wie in meiner früheren Arbeit, abgesehen davon, dass die beiden Stellungen des Polarisators im Nachstehenden mit  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  statt mit  $q_1$  und  $q_2$  bezeichnet sind. Als Material hatte mir Hr. Prof. Voigt freundlichst Stücke derselben Krystalle zur Verfügung gestellt, für welche er kürzlich die Elasticitätsconstanten bestimmt hat.<sup>1)</sup> Die zu meiner Untersuchung benutzten rechtwinkligen Parallelepipeda wurden von Hrn. Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. H. hergestellt. Die Beobachtungen habe ich im physikalischen Institut zu Göttingen ausgeführt.

#### Steinsalz.

##### Dimensionen und Orientirungen der benutzten Prismen.

Es waren, wie auch beim Sylvin, drei Gattungen von Prismen hergestellt worden; bei allen war eine der kurzen Kanten ( $D$ )<sup>2)</sup> parallel einer Würfelnormale (der  $Z$ -Axe), die Längsrichtung  $L$  (die Druckrichtung) also parallel einer Würfel- fläche. Der Winkel zwischen der Richtung  $L$  und der nächst- liegenden Würfelnormale ( $X$ -Axe), also der im I. Theile mit  $q$  bezeichnete Winkel, sollte betragen:  $0^\circ$  für die Gattung (1),  $45^\circ$  für die Gattung (2),  $22\frac{1}{2}^\circ$  für die Gattung (3). Nach Beendigung der Versuche wurden die Orientirungen der Prismen (2) und (3) durch Messung der Neigung kleiner Spaltflächen mit dem Reflexionsgoniometer geprüft und erwiesen sich als beträchtlich von obigen Werthen verschieden. Bei der Gattung (2) betrugen die Abweichungen ca.  $1^\circ$  und

1) W. Voigt, Wied. Ann. **35**, p. 651 u. 655. 1888.

2) Die hier mit  $D$  bezeichnete Richtung ist nicht mit der im I. Theile ebenso benannten, welche eine Dodekaëdernormale war, zu verwechseln.

konnten bei der Berechnung vernachlässigt werden, da für  $\varphi = 45^\circ$  die relative Verzögerung ein Minimum (bezw. Maximum) erreicht; dagegen waren bei der Gattung (3) die Abweichungen zum Theil noch grösser und mussten bei der Berechnung berücksichtigt werden, weshalb nachstehend die Werthe von  $\varphi$  für die einzelnen Prismen angegeben sind. Von den drei Gattungen waren bezw. 3, 6 und 4 Prismen vorhanden.

|                   |                          |                |                |                |      |          |
|-------------------|--------------------------|----------------|----------------|----------------|------|----------|
| Gattung 1. Prisma | I                        | II             | III            |                |      |          |
|                   | $B = 4,06$               | 3,98           | 3,96           | mm             |      |          |
|                   | $D = 3,85$               | 3,85           | 3,82           | mm.            |      |          |
| Gattung 2. Pr.    | I                        | II             | III            | IV             | V    | VI       |
|                   | $B = 3,84$               | 3,82           | 3,84           | 3,96           | 3,97 | 3,84 mm  |
|                   | $D = 3,96$               | 3,95           | 3,94           | 3,83           | 3,84 | 3,96 mm. |
| Gattung 3. Pr.    | I                        | II             | III            | IV             |      |          |
|                   | $B = 3,96$               | 3,84           | 3,83           | 3,96           |      |          |
|                   | $D = 3,84$               | 3,96           | 3,96           | 3,83           |      |          |
|                   | $\varphi = 20^\circ 53'$ | $24^\circ 37'$ | $21^\circ 51'$ | $25^\circ 33'$ |      |          |

#### Beobachtungen der relativen Verzögerungen.

Die Belastung  $Q$  des Hebels betrug immer 1440 g. Die Grössen  $\bar{A}$  sind die relativen Verzögerungen in Wellenlängen bezogen auf den Druck von 1 g. Der Brechungscoefficient  $n$  für Natriumlicht wurde nach den nahe übereinstimmenden Bestimmungen verschiedener Beobachter = 1,5445 angenommen.

#### Gattung (1).

##### Beobachtungsrichtung $D$ .

|           | $\alpha = \alpha_1$ |       |        | $\alpha = \alpha_2$ |       |        | Mittel $\bar{A}$ | $\bar{A} \cdot 10^4$ |
|-----------|---------------------|-------|--------|---------------------|-------|--------|------------------|----------------------|
|           | L. Rd.              | M.    | R. Rd. | L. Rd.              | M.    | R. Rd. |                  |                      |
| Prisma I. | 1,142               | 1,259 | 1,361  | 1,136               | 1,251 | 1,333  | 1,247            | 0,364                |
| " II.     | 1,384               | 1,308 | 1,229  | 1,379               | 1,327 | 1,199  | 1,309            | 0,374                |
| " III.    | 1,356               | 1,311 | 1,286  | 1,366               | 1,296 | 1,305  | 1,320            | 0,375                |

##### Beobachtungsrichtung $B$ .

|           | $\alpha_1$ |       |        | $\alpha_2$ |       |        | Mittel $\bar{A}$ | $\bar{A} \cdot 10^4$ |
|-----------|------------|-------|--------|------------|-------|--------|------------------|----------------------|
|           | L. Rd.     | M.    | R. Rd. | L. Rd.     | M.    | R. Rd. |                  |                      |
| Prisma I. | 1,331      | 1,354 | 1,361  | 1,325      | 1,394 | 1,349  | 1,352            | 0,374                |
| " II.     | 1,333      | 1,393 | 1,359  | 1,347      | 1,386 | 1,375  | 1,365            | 0,377                |
| " III.    | 1,310      | 1,357 | 1,420  | 1,287      | 1,339 | 1,466  | 1,363            | 0,374                |

Da bei der Gattung (1) die Verzögerung  $\bar{A}$  für die Richtungen  $B$  und  $D$  theoretisch dieselbe sein muss, ist sie

aus allen sechs Beobachtungsreihen zusammen zu berechnen. Man findet so im Mittel:

$$\bar{A}_1 = 0,373 \cdot 10^{-4},$$

$$C_1 = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{p v^2} = \frac{2\lambda}{n^3} \bar{A}_1 = + 1,185 \cdot 10^{-8}.$$

( $\lambda$  bedeutet die Wellenlänge des Natriumlichts,  $v$  die Lichtgeschwindigkeit in Luft).

Gattung 2.  
Beobachtungsrichtung  $\parallel D$  (Z-Axe).

|           | $\alpha_1$ |       |        | $\alpha_2$ |       |        | Mittel $\bar{A}$ | $\bar{A} \cdot 10^4$ |
|-----------|------------|-------|--------|------------|-------|--------|------------------|----------------------|
|           | L. Rd.     | M.    | R. Rd. | L. Rd.     | M.    | R. Rd. |                  |                      |
| Prisma I. | 1,081      | 0,921 | 0,800  | 1,089      | 0,975 | 0,801  | 0,945            | 0,260                |
| " II.     | 1,038      | 0,963 | 0,901  | 1,007      | 0,957 | 0,894  | 0,959            | 0,2625               |
| " III.    | 0,957      | 0,962 | 0,939  | 0,968      | 0,971 | 0,954  |                  |                      |
| " IV.     | 0,940      | 0,953 | 0,992  | 0,924      | 0,959 | 1,014  | 0,964            | 0,2655               |
| " V.      | 0,915      | 0,934 | 0,944  | 0,892      | 0,943 | 0,955  | 0,931            | 0,264                |
| " VI.     | 0,989      | 0,953 | 0,847  | 0,963      | 0,939 | 0,855  | 0,923            | 0,263                |
| " VI.     | 1,019      | 0,939 | 0,873  | 1,025      | 0,933 | 0,865  | 0,942            | 0,260                |

$$\bar{A}_2 = 0,2625 \cdot 10^{-4}.$$

$$C_2 = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{p v^2} = \frac{2\lambda}{n^3} \bar{A}_2 = + 0,835 \cdot 10^{-8}.$$

Beobachtungsrichtung  $\parallel B$  (Y-Axe).

|           | $\alpha_1$ |       |        | $\alpha_2$ |       |        | Mittel $\bar{A}$ | $\bar{A} \cdot 10^4$ |
|-----------|------------|-------|--------|------------|-------|--------|------------------|----------------------|
|           | L. Rd.     | M.    | R. Rd. | L. Rd.     | M.    | R. Rd. |                  |                      |
| Prisma I. | 1,199      | 1,130 | 1,043  | 1,169      | 1,115 | 1,058  | 1,119            | 0,318                |
| " II.     | 1,161      | 1,098 | 1,075  | 1,154      | 1,101 | 1,070  | 1,119            | 0,317                |
| " III.    | 1,039      | 1,151 | 1,204  | 1,038      | 1,168 | 1,169  |                  |                      |
| " IV.     | 1,163      | 1,098 | 1,085  | 1,153      | 1,080 | 1,110  | 1,115            | 0,316                |
| " V.      | 1,090      | 1,124 | 1,185  | 1,086      | 1,113 | 1,180  | 1,130            | 0,310                |
| " VI.     | 1,075      | 1,175 | 1,190  | 1,096      | 1,142 | 1,194  | 1,145            | 0,315                |
| " VI.     | 1,035      | 1,111 | 1,235  | 1,038      | 1,098 | 1,229  | 1,124            | 0,320                |

$$\bar{A}_3 = 0,316 \cdot 10^{-4}.$$

$$C_3 = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{p v^2} = \frac{2\lambda}{n^3} \bar{A}_3 = + 1,005 \cdot 10^{-8}.$$

Gattung 3.  
Beobachtungsrichtung  $\parallel D$  (Z-Axe).

|           | $\alpha_1$ |       |        | $\alpha_2$ |       |        | $\bar{A}$ | $\bar{A} \cdot 10^4$ | $C_4 \cdot 10^8$ |
|-----------|------------|-------|--------|------------|-------|--------|-----------|----------------------|------------------|
|           | L. Rd.     | M.    | R. Rd. | L. Rd.     | M.    | R. Rd. |           |                      |                  |
| Prisma I. | 1,140      | 1,165 | 1,151  | 1,147      | 1,152 | 1,142  | 1,150     | 0,326                | 1,037            |
| " II.     | 1,158      | 1,134 | 1,174  | 1,129      | 1,125 | 1,150  | 1,145     | 0,316                | 1,003            |
| " III.    | 1,092      | 1,179 | 1,223  | 1,112      | 1,150 | 1,225  | 1,163     | 0,320                | 1,015            |
| " IV.     | 1,087      | 1,150 | 1,145  | 1,098      | 1,133 | 1,156  | 1,128     | 0,321                | 1,020            |

## Beobachtungsrichtung B.

|           | $\alpha_1$ |       |        | $\alpha_2$ |          |        | $\delta'$ | $\delta_3 \cdot 10^4$ | $C_3 \cdot 10^3$ |
|-----------|------------|-------|--------|------------|----------|--------|-----------|-----------------------|------------------|
|           | L. Rd.     | M.    | R. Rd. | L. Rd.     | M.       | R. Rd. |           |                       |                  |
| Prisma I. | 1,314      | 1,230 | 1,163  | 1,314      | 1,250    | 1,155  | 1,288     | 0,341                 | 1,081            |
| " II.     | 1,242      | 1,237 | 1,215  | 1,220      | (1,255?) | 1,234  | 1,229     | 0,350                 | 1,110            |
| " III.    | 1,207      | 1,210 | 1,218  | 1,208      | 1,223    | 1,197  | 1,212     | 0,344                 | 1,094            |
| " IV.     | 1,220      | 1,238 | 1,309  | 1,207      | 1,235    | 1,272  | 1,247     | 0,343                 | 1,089            |

Hier kann wegen der Abweichung in den Orientirungen aus den an den vier Prismen bestimmten Grössen

$$C_4 = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{p v^2} \quad \text{und} \quad C_5 = \frac{\omega_L^2 - \omega_D^2}{p v^2}$$

nicht das arithmetische Mittel genommen werden, sondern sie müssen jede besonders berechnet werden.

Die Schwingungsrichtungen der in der Richtung von  $D$  ( $Z$ -Axe) durch die Prismen (3) hindurchgehenden Wellen fallen nicht genau mit der Druckrichtung ( $L$ ) und der zu ihr senkrechten zusammen, aber diese Abweichung ist so klein, dass sie die Compensatorbeobachtungen nicht beeinträchtigte. Die genannte Abweichung der Schwingungsrichtungen wurde auch (durch Einstellung der Nicols auf das Maximum der Dunkelheit) gemessen; die Resultate folgen hier.

Beobachtungen der Schwingungsrichtungen  
an den Prismen (3).

Die erste und zweite Columnne geben die mittleren beobachteten Stellungen  $\alpha'$  und  $\alpha''$  des Polarisators bei zwei Stellungen des comprimierten Prismas, deren eine durch eine Drehung von  $180^\circ$  um die Verticalaxe ( $L$ ) aus der anderen hervorging; die letzte Columnne enthält die daraus im Mittel sich ergebende Abweichung der einen Schwingungsrichtung ( $X$ -Axe) von der Druckrichtung gegen die nächstliegende Würfelnormale hin, also den im I. Theile mit  $\Phi$  bezeichneten Winkel.

|           | $\alpha'$   | $\alpha''$    | $\Phi$ |
|-----------|-------------|---------------|--------|
| Prisma I. | 1,4°; 91,3° | 351,2°; 81,5° | 5° 0'  |
| " II.     | 1,3 91,2    | 351,1 81,2    | 5 4    |
| " III.    | 0,9 91,1    | 350,6 80,7    | 5 11   |
| " IV.     | 1,3 91,2    | 351,5 81,4    | 4 54   |

Die Unsicherheit der einzelnen Einstellungen betrug bis zu  $1^\circ$  und darüber, weil die Steinsalzprismen nicht völlig



homogen waren, sondern im undeformirten Zustande von doppeltbrechenden Streifen durchzogen erschienen (vgl. die Anmerkung).

### Berechnung der Constanten $a$ und $b$ und Prüfung der Theorie.

Zur Berechnung der Constanten  $a$ ,  $b$  sollen nur die oben gefundenen Grössen  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  verwendet werden, weil deren Bestimmung am sichersten war. Dieselben sind aus gleich vielen Beobachtungen abgeleitet und also bei der Constantenberechnung (nach der Methode der kleinsten Quadrate) mit gleichem Gewicht in Rechnung zu bringen. Nach den Formeln (4) ist:

$$C_1 = -\frac{a}{v^2}, \quad C_2 = -\frac{b}{v^2}, \quad C_3 = -\frac{a+b}{2v^2};$$

daher findet man:

$$\frac{a}{v^2} = -\frac{5C_1 - C_2 + 2C_3}{6}, \quad \frac{b}{v^2} = -\frac{5C_2 - C_1 + 2C_3}{6}$$

und nach Einsetzung der oben angegebenen Werthe für  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$ :

$$\frac{a}{v^2} = \frac{1}{v^2} (a_{11} - a_{12}) (s_{11} - s_{12}) = -1,183 \cdot 10^{-8},$$

$$\frac{b}{v^2} = \frac{1}{v^2} a_{44} s_{44} = -0,833 \cdot 10^{-8}.$$

Hieraus ergeben sich unter Benutzung von  $s_{11} - s_{12} = 28,98 \cdot 10^{-8}$  und  $s_{44} = 77,29 \cdot 10^{-8}$  die Werthe:

$$a_{11} - a_{12} = -0,0408 \cdot v^2, \quad a_{44} = -0,0108 \cdot v^2.$$

Die Relation  $a_{11} - a_{12} = 2a_{44}$ , welche für isotrope Körper gilt, ist also auch nicht annähernd erfüllt. Wenn ein Steinsalzkrystall eine bestimmte Dehnung einmal in der Richtung einer Würfelnormale, zweitens in der Richtung einer Octaëdernormale erfährt, so ist die dadurch erzeugte Doppelbrechung im ersten Falle beinahe *doppelt so stark* als im zweiten. Dem absoluten Werthe nach ist  $a_{11} - a_{12}$  nur etwa halb so gross wie bei Glas.

Die aus obigen Werthen von  $a$  und  $b$  rückwärts berechneten Grössen  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  stimmen mit den direct aus

1) Nach W. Voigt, Wied. Ann. 35. p. 654. 1888.

den Beobachtungen erhaltenen sehr gut überein, wie die nachstehende Zusammenstellung zeigt:

|            | $C_1 \cdot 10^8$ | $C_2 \cdot 10^8$ | $C_3 \cdot 10^8$ |
|------------|------------------|------------------|------------------|
| Beobachtet | 1,185            | 0,835            | 1,005            |
| Berechnet  | 1,183            | 0,833            | 1,008            |

Die Beobachtungen an den Prismen der Gattung (3) können zur weiteren Prüfung der Théorie dienen. Es ist nach Gl. (4):

$$C_1 = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{p v^2} = -\frac{1}{v^2} \sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi};$$

ferner ist:

$$\begin{aligned} \omega_D^2 - \omega_L^2 &= \omega_z^2 - \omega_x^2 \cos^2(\varphi - \psi) - \omega_y^2 \sin^2(\varphi - \psi) \\ &= (\omega_z^2 - \omega_x^2) \cos^2(\varphi - \psi) + (\omega_z^2 - \omega_y^2) \sin^2(\varphi - \psi) \\ &= \frac{1}{2} p \left\{ a + \cos 2(\varphi - \psi) \cdot \sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi} \right\}, \end{aligned}$$

oder, da

$$\begin{aligned} \cos 2(\varphi - \psi) &= \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} 2\varphi\right)^2}} + \frac{\sin 2\varphi \cdot \frac{b}{a} \operatorname{tg} 2\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} 2\varphi\right)^2}} \\ &= \frac{a \cos^2 2\varphi + b \sin^2 2\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi}} \quad \text{ist,} \end{aligned}$$

$$\omega_D^2 - \omega_L^2 = \frac{1}{2} p \left\{ a + \frac{a \cos^2 2\varphi + b \sin^2 2\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi}} \right\},$$

$$C_3 = -\frac{1}{v^2} \left\{ \frac{a}{2} + \frac{a \cos^2 2\varphi + b \sin^2 2\varphi}{2} \right\}.$$

Endlich ist nach Formel (3):

$$\Phi = \varphi - \psi = \varphi - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{a} \operatorname{tg} 2\varphi \right).$$

Setzt man in diese Formeln die oben angegebenen für die 4 Prismen der Gattung (3) geltenden Winkel  $\varphi$  ein, so erhält man die in der folgenden Tabelle mit den beobachteten zusammengestellten Werthe von  $C_1$ ,  $C_3$  und  $\Phi$ .

|                        | Pr. I. | II    | III   | IV    |
|------------------------|--------|-------|-------|-------|
| $C_1 \cdot 10^8$ {ber. | 1,042  | 0,998 | 1,031 | 0,987 |
| {beob.                 | 1,037  | 1,003 | 1,015 | 1,020 |
| $C_3 \cdot 10^8$ {ber. | 1,106  | 1,084 | 1,100 | 1,078 |
| {beob.                 | 1,081  | 1,110 | 1,094 | 1,089 |
| $\Phi$ {ber.           | 4°49'  | 5°0'  | 4°54' | 5°0'  |
| {beob.                 | 5 0    | 5 4   | 5 11  | 4 54  |

Die Uebereinstimmung ist hier zum Theil weniger gut, was unter anderem darin seinen Grund haben mag, dass hier eine geringe Abweichung der Druckrichtung von der Richtung  $L$  schon beträchtlichen Einfluss auf die relativen Verzögerungen hat. Doch übersteigen die Abweichungen nicht die Grenzen der Beobachtungsfehler.

Um zu ermitteln, in welcher Weise die Constanten  $a$  und  $b$  von der Wellenlänge abhängen, wurden einige Reihen von Compensatorbeobachtungen an je einem Prisma der Gattung (1) und (2) in der Weise angestellt, dass mittelst eines Glasprismas mit horizontaler brechender Kante (— es wurde ein Prisma à vision directe mit sehr starker Dispersion benutzt —) ein Spectrum auf den verticalen Spalt des Compensators geworfen wurde. Die Verschiebung des Streifens wurde, wie gewöhnlich, an einer durch einen horizontalen feinen Draht fixirten Stelle des Spaltes gemessen und die entsprechende Wellenlänge dadurch ermittelt, dass die Compensatorschraube soweit gedreht wurde, bis der nächste dunkle Streifen an der fixirten Stelle erschien; denn die hierzu erforderliche Anzahl von Umdrehungen ist proportional der Wellenlänge. Das Spectrum konnte vertical verschoben werden, sodass nacheinander verschiedene Farben auf die bezeichnete Stelle fielen. Es ergab sich in beiden Fällen eine deutliche Zunahme der Streifenverschiebung  $\Delta'$  nach dem brechbareren Ende des Spectrums hin; allein ein Theil dieser Zunahme rührt von der Dispersion her, da  $\Delta'$  proportional mit  $n^3$  ist. Bei Berücksichtigung der von Hrn. Stefan<sup>1)</sup> bestimmten Werthe von  $n$  fand sich nur eine geringe Zunahme der Constanten  $a$  und  $b$  mit abnehmender Wellenlänge, bei  $a$  etwa um 5 Proc., bei  $b$  um höchstens 3 Proc. für das Intervall von der Linie  $B$  bis  $F$ . Doch sind diese Zahlenwerthe unsicher wegen zu geringer Anzahl der Beobachtungen.

#### Messungen der absoluten Verzögerungen.

Die Steinsalzprismen, welche zu den im Vorhergehenden beschriebenen Versuchen dienten, hatten sämtlich nicht hinreichend genau parallele Flächen, um zur Beobachtung der absoluten Verzögerungen nach der bekannten auf der Ver-

1) Stefan, Sitzungsber. der Wien. Acad. 63. (2). p. 223. 1871.

schiebung von Beugungsstreifen beruhenden Methode brauchbar zu sein. Es wurden daher noch 6 Prismen der Gattung (1) bei Herren Dr. Steeg und Reuter nachbestellt, von denen wenigstens ein Paar recht gute Beugungsstreifen gab. An diesem wurden Beobachtungen nach der früher von mir beschriebenen Methode<sup>1)</sup> angestellt. Dabei wurde theils Sonnenlicht, theils das Licht eines Argandbrenners (welches hierbei als Natriumlicht betrachtet werden kann) benutzt, was zulässig ist, weil das Verhältniss der beiden absoluten Verzögerungen von der Wellenlänge unabhängig ist, sofern man die Dispersion und die Veränderlichkeit von  $a_{11}$  und  $a_{12}$  mit der Wellenlänge unberücksichtigt lässt; dass diese letztere Veränderlichkeit sehr gering ist, kann man nach den vorhergehenden Resultaten als sehr wahrscheinlich betrachten. Uebrigens ist ja auch die „mittlere Wellenlänge“ des Sonnenlichtes ( $571.10^{-6}$ ) nur wenig von derjenigen der  $D$ -Linie verschieden.

An demjenigen Prisma, welches die besten Beobachtungen gestattete, wurden bei einer Belastung von 1510 g folgende absolute Verzögerungen  $\delta_h$  und  $\delta_v$  der vertical, resp. horizontal polarisirten Welle, ausgedrückt in Wellenlängen, gemessen:

|                       | L. Rd. | M.    | R. Rd. | Mittel |
|-----------------------|--------|-------|--------|--------|
| $\delta_v$            | 0,123  | 0,147 | 0,165  | 0,145  |
| $\delta_h$            | 0,166  | 0,217 | 0,226  | 0,203  |
| $\delta_v : \delta_h$ | 0,740  | 0,728 | 0,675  | 0,714  |

Hierbei sind die mit Sonnenlicht gemessenen Verzögerungen schon auf Natriumlicht reducirt.

Zwischen den Grössen

$$C_v = \frac{\omega_0^2 - \omega_v^2}{p v^2} = \frac{c}{v^2}, \quad C_h = \frac{\omega_0^2 - \omega_h^2}{p v^2} = \frac{a + c}{v^2}$$

und den Verzögerungen  $\delta_v$ ,  $\delta_h$  bestehen die Gleichungen:

$$C_v = \frac{2\lambda}{p D^0 n^3} \delta_v - \frac{2(D - D^0)}{p D^0 n^3} (n - 1),$$

$$C_h = \frac{2\lambda}{p D^0 n^3} \delta_h - \frac{2(D - D^0)}{p D^0 n^3} (n - 1),$$

1) F. Poekels, l. c. p. 168.

worin  $(D - D^0)/D$  die Querdilatation in der Beobachtungsrichtung, also  $= -p s_{12}$  ist. Aus diesen beiden Gleichungen findet sich bei Benutzung obiger Mittelwerthe von  $\delta_v$  und  $\delta_h$ :

$$C_v = 1,48 \cdot 10^{-8}, \quad C_h = 2,68 \cdot 10^{-8}.$$

Zuverlässigere Werthe erhält man aber jedenfalls, wenn man nur das Verhältniss  $\delta_v : \delta_h = 0,714$  benutzt und die aus den Compensatorbeobachtungen abgeleitete Differenz  $C_v - C_h = -1,183 \cdot 10^{-8}$  hinzunimmt; mit letzterer stimmt übrigens die Differenz der direct bestimmten Grössen  $C_v$  und  $C_h$  sehr nahe überein. Man findet auf die angegebene Weise:

$$C_v = 1,43 \cdot 10^{-8}, \quad C_h = 2,61 \cdot 10^{-8}.$$

Nun war:

$$C_v = \frac{c}{v^2} = \frac{1}{v^2} \{a_{11}s_{12} + a_{12}(s_{11} + s_{12})\} = \frac{1}{v^2} \{(a_{11} - a_{12})s_{12} + a_{12}(s_{11} + 2s_{12})\};$$

setzt man hierin  $s_{12} = -5,165 \cdot 10^{-8}$ ,  $s_{11} + 2s_{12} = +13,49 \cdot 10^{-8}$ ,  $a_{11} - a_{12} = -0,0408 \cdot v^2$  ein, so folgt:

$$a_{12} = +0,178 \cdot v^2, \quad a_{11} = +0,137 \cdot v^2.$$

Dazu kommt der schon oben gefundene Werth:

$$a_{44} = -0,0103 \cdot v^2.$$

Es muss jedoch bemerkt werden, dass bei  $a_{11}$  und  $a_{12}$  die letzte Stelle völlig unsicher ist wegen der ungenauen Bestimmung der absoluten Verzögerungen.

Die Aenderung der Lichtgeschwindigkeit in Steinsalz bei allseitig gleichem Druck ist nach dem Vorhergehenden gegeben durch:

$$\frac{\omega^2 - \omega^0^2}{v^2} = \frac{1}{v^2} \frac{a_{11} + 2a_{12}}{3} \cdot A = +0,164 \cdot A,$$

wo  $A$  die cubische Dilatation bezeichnet; eine gleichförmige Compression bewirkt also eine Abnahme der Lichtgeschwindigkeit, wie zu erwarten war und wie es auch bei Quarz, Flussspath und Glas der Fall ist. Die Aenderung des Brechungscoefficienten für Na-Licht ist:

$$dn = \frac{n^3}{2} \frac{\omega^0^2 - \omega^2}{v^2} = -0,304 \cdot A.$$

Man kann nun hieraus berechnen, wie sich der Brechungscoefficient mit der Temperatur ( $t$ ) ändern würde, wenn die Annahme richtig wäre, dass die optische Wirkung einer

thermischen Dilatation dieselbe ist, wie diejenige der gleich grossen elastischen. Zu diesem Zwecke braucht man nur für  $\Delta$  das Dreifache des linearen Ausdehnungscoefficienten  $\gamma$  einzusetzen, welcher für Steinsalz  $= 4,06 \cdot 10^{-5}$  ist<sup>1)</sup>, und erhält:

$$\frac{dn}{dt} = -3,72 \cdot 10^{-5}.$$

Directe Bestimmungen von  $dn/dt$  liegen für Steinsalz von Hrn. Stefan<sup>2)</sup> vor, welcher gefunden hat:

$$\frac{dn}{dt} = -3,73 \cdot 10^{-5}.$$

Hiernach erscheint obige Annahme für Steinsalz völlig zutreffend, wenn auch die Uebereinstimmung der beiden Werthe von  $dn/dt$  wohl nur zufällig eine so genaue ist; in der That hat N. Lagerborg<sup>3)</sup> erheblich kleinere Werthe von  $dn/dt$  beobachtet, nämlich  $-3,08 \cdot 10^{-5}$  für  $14,5^\circ$  bis  $47^\circ$ ,  $-3,41 \cdot 10^{-5}$  für  $14,5^\circ$  bis  $90,5^\circ$ , wobei jedoch zu bemerken ist, dass dieselbe auch einen viel kleineren und mit der Temperatur auffallend stark variablen Ausdehnungscoefficienten angibt.

#### Sylvin.

#### Dimensionen und Orientirungen der benutzten Prismen.

Von der Gattung (1) waren zwei, von den Gattungen (2) und (3) je ein Prisma hergestellt worden. Die Orientirung der Längsaxe  $L$  war bei dem Prisma (2) nur um  $13'$  von der verlangten ( $q = 45^\circ$ ) verschieden; diese Abweichung konnte aus dem beim Steinsalz angeführten Grunde vernachlässigt werden. Für das Prisma (3) fand sich  $q = 22^\circ 24'$ . Die Querdimensionen waren folgende:

| Prisma (1) I | (1) II | (2)   | (3)  |
|--------------|--------|-------|------|
| $B = 3,85$   | 3,86   | 3,855 | 3,84 |
| $D = 3,73$   | 3,73   | 3,74  | 3,72 |

1) W. Voigt, Wied. Ann. 35. p. 655. 1888.

2) Stefan, Sitzungsber. der Wien. Acad. 63. (2). p. 223. 1871. In dieser Arbeit, welche ich bei Veröffentlichung meiner ersten Abhandlung nicht kannte, ist ein um ca.  $\frac{1}{11}$  kleinerer Werth von  $dn/dt$  für Flussspath angegeben, als der von mir dort angeführte, den Dufet gefunden hat.

3) Cf. Referat in der Zeitschr. f. Kryst. 15. p. 432. 1889.

## Beobachtungen der relativen Verzögerungen.

Hier wurden wegen der geringen Anzahl der Prismen je zwei Belastungen  $Q_1 = 470,59$ ,  $Q = 706$  g angewendet. Da dieselben wegen der Weichheit des Materials nur so klein sein durften, und da Gummiplatten als Zwischenlage dienen mussten, wodurch die Stellung der Prismen sich beim Belasten leicht etwas änderte, so konnte hier nur eine geringere Genauigkeit erreicht werden, als bei den früher untersuchten Substanzen. — Der Brechungscoefficient  $n$  für Na-Licht wurde nach Stefan = 1,490 gesetzt.

Gattung (1).

| Prisma                               | Belast. | $\alpha_1$ |        |        | $\alpha_2$ |        |        | $A'$   | $A \cdot 10^4$ | $A'$ ber. |
|--------------------------------------|---------|------------|--------|--------|------------|--------|--------|--------|----------------|-----------|
|                                      |         | L. Rd.     | M.     | R. Rd. | L. Rd.     | M.     | R. Rd. |        |                |           |
| Beobachtungsrichtung $\parallel D$ . |         |            |        |        |            |        |        |        |                |           |
| I.                                   | $Q_1$   | -0,645     | -0,580 | -0,512 | -0,662     | -0,606 | -0,508 | -0,585 | -0,483         | -0,588    |
|                                      | $Q_2$   | -0,986     | -0,862 | -0,779 | -1,009     | -0,872 | -0,801 | -0,885 |                | -0,882    |
| II.                                  | $Q_1$   | -0,545     | -0,548 | -0,565 | -0,555     | -0,566 | -0,595 | -0,562 | -0,460         | -0,561    |
|                                      | $Q_2$   | -0,802     | -0,838 | -0,875 | -0,810     | -0,817 | -0,905 | -0,841 |                | -0,841    |
| Beobachtungsrichtung $\parallel B$ . |         |            |        |        |            |        |        |        |                |           |
| I.                                   | $Q_1$   | -0,536     | -0,545 | -0,553 | -0,538     | -0,542 | -0,562 | -0,546 | -0,466         | -0,551    |
|                                      | $Q_2$   | -0,826     | -0,853 | -0,822 | -0,822     | -0,831 | -0,827 | -0,830 |                | -0,826    |
| II.                                  | $Q_1$   | -0,525     | -0,585 | -0,571 | -0,536     | -0,589 | -0,548 | -0,559 | -0,474         | -0,559    |
|                                      | $Q_2$   | -0,807     | -0,862 | -0,854 | -0,786     | -0,886 | -0,842 | -0,840 |                | -0,840    |

Die letzte Columnne enthält die aus  $\bar{A}$  rückwärts berechneten Werthe von  $A'$  für die Belastungen  $Q_1$  und  $Q_2$ . ( $\bar{A}$  ist aus den zwei beobachteten Mittelwerthen von  $A'$  nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet). Man sieht aus denselben, dass die Annahme der Proportionalität mit dem Drucke auch hier sich vollkommen bestätigt. — Die Grössen  $A$  sind in der obigen Tabelle alle mit dem negativen Vorzeichen versehen, weil im Gegensatz zu dem gewöhnlichen Verhalten die senkrecht zur Druckrichtung polarisirte Welle gegen die parallel zu derselben polarisirte verzögert wurde.<sup>1)</sup>

Das Gesamtmittel für  $\bar{A}$  ist:

$$\bar{A}_1 = -0,471 \cdot 10^{-4}.$$

1) Diese Eigenthümlichkeit des Sylvins hat zuerst Hr. Brauns wahrgenommen; cf. Neues Jahrb. f. Min. 1886. 1. p. 232.

Hieraus folgt:

$$C_1 = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{p v^2} = -1,67 \cdot 10^{-8}.$$

Prisma (2).

Beobachtungsrichtung  $\parallel D$ .

| Bel.  | $\alpha_1$ |       |        | $\alpha_2$ |       |        | Mittel | $A_2 \cdot 10^4$ | $A' \text{ ber.}$ |
|-------|------------|-------|--------|------------|-------|--------|--------|------------------|-------------------|
|       | L. Rd.     | M.    | R. Rd. | L. Rd.     | M.    | R. Rd. | $A'$   |                  |                   |
| $Q_1$ | 1,460      | 1,400 | 1,458  | 1,446      | 1,471 | 1,473  | 1,451  | + 1,19           | 1,450             |
| $Q_2$ | 2,182      | 2,130 | 2,185  | 2,185      | 2,175 | 2,188  | 2,174  |                  | 2,175             |

$$C_2 = \frac{\omega_v^2 - \omega_h^2}{p v^2} = +4,22 \cdot 10^{-8}.$$

Aus den Erörterungen im I. Theile ist ersichtlich, dass in jedem Falle  $C_1 = -a/v^2$ ,  $C_2 = -b/v^2$  ist; hier liegt also der dort als vierter besprochene Fall vor. Demnach ist bei Gattung (2)  $\omega_v = \omega_y$ ,  $\omega_h = \omega_x$ ; die  $y$ -Axe ist immer die Schwingungs- (Polarisations-) Richtung der langsameren von den beiden parallel  $Z$  sich fortpflanzenden Wellen.

Beobachtungsrichtung  $\parallel B$ .

| Bel.  | $\alpha_1$ |       |        | $\alpha_2$ |       |        | Mittel | $A'$  | $A' \text{ ber.}$ |
|-------|------------|-------|--------|------------|-------|--------|--------|-------|-------------------|
|       | L. Rd.     | M.    | R. Rd. | L. Rd.     | M.    | R. Rd. | $A'$   |       |                   |
| $Q_1$ | 0,443      | 0,459 | 0,405  | 0,437      | 0,432 | 0,407  | 0,431  | 0,418 | 0,417             |
|       | 0,373      | 0,402 | 0,425  | 0,383      | 0,392 | 0,453  | 0,405  |       |                   |
| $Q_2$ | 0,659      | 0,638 | 0,655  | 0,632      | 0,658 | 0,622  | 0,644  | 0,626 | 0,626             |
|       | 0,576      | 0,599 | 0,635  | 0,576      | 0,583 | 0,676  | 0,608  |       |                   |

$$A_3 = +0,354 \cdot 10^{-4}, \quad C_3 = \frac{\omega_y^2 - \omega_z^2}{p v^2} = +1,254 \cdot 10^{-8}.$$

Der Streifen des Compensators war hier infolge unregelmässiger ziemlich stark doppeltbrechender Flecke im Prisma mehrfach stark gestört.

Prisma (3).

Beobachtungsrichtung  $\parallel D$ .

| Bel.  | $\alpha_1$ |       |        | $\alpha_2$ |       |        | Mittel | $A_4 \cdot 10^4$ | $A' \text{ ber.}$ |
|-------|------------|-------|--------|------------|-------|--------|--------|------------------|-------------------|
|       | L. Rd.     | M.    | R. Rd. | L. Rd.     | M.    | R. Rd. | $A'$   |                  |                   |
| $Q_1$ | 1,117      | 1,146 | 1,147  | 1,102      | 1,153 | 1,140  | 1,134  | 0,922            | 1,121             |
| $Q_2$ | 1,677      | 1,707 | 1,713  | 1,607      | 1,653 | 1,692  | 1,675  |                  | 1,682             |

$$C_4 = \frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{p v^2} = +3,27 \cdot 10^{-8}.$$



Bei diesen Messungen musste, weil die Schwingungsrichtungen im comprimierten Prisma stark von der Druckrichtung und der zu ihr senkrechten abwichen, zwischen Prisma und Compensator eine senkrecht zur optischen Axe geschliffene Quarzplatte eingeschaltet werden, wie es schon bei einigen meiner früheren Beobachtungen geschah.<sup>1)</sup>

Beobachtungsrichtung || *B*.

| Bel.  | $\alpha_1$ |        | $\alpha_2$ |        | $\alpha_3$ |        | $\Delta'$ | $\Delta_5 \cdot 10^4$ |
|-------|------------|--------|------------|--------|------------|--------|-----------|-----------------------|
|       | L. Rd.     | M.     | R. Rd.     | L. Rd. | M.         | R. Rd. |           |                       |
| $Q_2$ | -0,073     | -0,052 | -0,068     | -0,100 | -0,074     | -0,081 | -0,076    | -0,0427               |

$$C_5 = \frac{\omega_L^2 - \omega_D^2}{p v^2} = -0,152 \cdot 10^{-8}.$$

In dieser Richtung wurde wegen der sehr geringen Grösse der relativen Verzögerung nur bei der einen Belastung  $Q_2$  beobachtet.

Der Sinn der Doppelbrechung war hier wieder anomal.

Bestimmung der Schwingungsrichtungen auf den Würfelflächen des Prismas (3).

Der Winkel  $\Phi$  zwischen der Druckrichtung und der Schwingungsrichtung der schnelleren Welle (d. i. der *X*-Axe) wurde im Mittel =  $55^\circ 43'$  gefunden; die Einstellung auf grösste Dunkelheit liess sich nur bis auf ca.  $1^\circ$  genau ausführen.

Berechnung der Constanten *a* und *b* und Prüfung der Theorie.

Da die Messungen am Prisma (2) in der Richtung *B* aus dem oben angegebenen Grunde und diejenigen an (3) aus demselben wie beim Steinsalz weniger sicher waren, als die übrigen, so sollen sie nicht zur Constantenberechnung benutzt werden. Für dieselben bleiben also nur  $C_1$  und  $C_2$ , welche direct die Constanten *a*, *b* liefern. Es wird also für Sylvin angenommen:

$$a = +1,67 \cdot 10^{-8} v^2, \quad b = -4,22 \cdot 10^{-8} v^2.$$

Sylvin wird also durch Druck parallel einer Würfelnormale positiv einaxig, durch Druck parallel einer Octaëder-

1) F. Pockels, l. c. p. 285. 380. 384.

normale negativ einaxig, gerade umgekehrt wie Flussspath. Ueber die weiteren Folgen dieses eigenthümlichen Verhältnisses von  $a:b$  vergleiche man die Discussion des vierten Falles im I. Theile und die zugehörige Fig. 3. Dass eine Sylvinplatte, durch welche das Licht in der Richtung einer Würfelnormale hindurchgeht, entgegengesetzten Sinn der Doppelbrechung erhält, je nachdem sie parallel einer Würfel- oder einer Rhombendodekaëdernormale gepresst wird, hat zuerst Hr. Brauns beobachtet.<sup>1)</sup>

Unter Benützung der Werthe der Elasticitätsconstanten<sup>2)</sup>

$$s_{11} - s_{12} = 28,1 \cdot 10^{-8}, \quad s_{44} = 153,0 \cdot 10^{-8}$$

erhält man für die optischen Constanten  $a_{11} - a_{12}$  und  $a_{44}$  des Sylvins die Werthe:

$$a_{11} - a_{12} = +0,0595 v^2, \quad a_{44} = -0,0276 \cdot v^2,$$

welche von denjenigen des Steinsalzes ganz und gar verschieden sind und noch viel weiter, als letztere, davon entfernt sind, die für isotrope Körper gültige Relation zu erfüllen, da sie entgegengesetztes Vorzeichen haben. Zum Vergleich seien hier noch einmal die von mir für Flussspath gefundenen Constanten angeführt; dieselben waren:

$$a_{11} - a_{12} = -0,172 \cdot v^2, \quad a_{44} = +0,0236 v^2.$$

Nun sind noch die Grössen  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_6$  und  $\Phi$  aus den obigen Werthen von  $a$  und  $b$  zu berechnen und mit den beobachteten Werthen zu vergleichen. Es ist:

$$C_3 = -\frac{a+b}{2v^2}, \quad C_4 = -\sqrt{\left(\frac{a}{v^2}\right)^2 \cos^2 2\varphi + \left(\frac{b}{v^2}\right)^2 \sin^2 2\varphi},$$

$$C_6 = -\frac{1}{v^2} \left\{ \frac{a}{2} + \frac{a \cos^2 2\varphi + b \sin^2 2\varphi}{2} \right\}; \quad \Phi = \varphi - \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{b}{a} \operatorname{tg} 2\varphi \right),$$

worin  $\varphi = 22^\circ 24'$  zu setzen ist. Man erhält hieraus die in der ersten Zeile nachstehender Tabelle angegebenen Werthe.

|            | $C_3 \cdot 10^8$ | $C_4 \cdot 10^8$ | $C_6 \cdot 10^8$ | $\Phi$  |
|------------|------------------|------------------|------------------|---------|
| Berechnet  | +1,275           | +3,205           | -0,208           | 56° 32' |
| Beobachtet | +1,254           | +3,27            | -0,152           | 55 43   |

1) Brauns, Neues Jahrb. f. Min. 1887. 1. p. 53.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 35. p. 659. 1888.

Die Abweichungen der berechneten von den beobachteten Werthen liegen auch hier durchweg innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler. — Hinsichtlich der Abhängigkeit der Constanten  $a$  und  $b$  von der Wellenlänge ergab sich, dass für das Intervall von der Linie  $C$  bis  $F$  mit wachsender Wellenlänge  $a$  beträchtlich (um ca. 9 Proc.) und  $-b$  sehr wenig (um ca.  $1\frac{1}{2}$  Proc.) abnimmt.

Zur Beobachtung der absoluten Verzögerungen waren die Prismen nicht genügend planparallel. — Nimmt man an, es sei beim Sylvin, ebenso wie beim Steinsalz, die Aenderung des Brechungscoefficienten bei Erwärmung identisch mit der durch die entsprechende elastische Dilatation erzeugten, so kann man mit Hülfe des von Hrn. Stefan<sup>1)</sup> bestimmten Werthes:

$$\frac{dn}{dt} = -3,5 \cdot 10^{-5}$$

und des Ausdehnungscoefficienten  $\gamma = 3,71 \cdot 10^{-5}$ <sup>2)</sup> die Constanten  $a_{11}$  und  $a_{12}$  berechnen und findet:

$$a_{11} = +0,229 \cdot v^2, \quad a_{12} = +0,170 \cdot v^2;$$

diese Zahlen werden also den wahren vermuthlich ziemlich nahe kommen.

Anmerkung über die optischen Anomalieen der untersuchten Steinsalz- und Sylvinprismen.

Aehnlich wie beim Flussspath<sup>3)</sup> zeigten sich auch hier von vornherein doppeltbrechende, parallel ihrer Längsrichtung auslöschende Streifen, nur mit dem Unterschiede, dass dieselben beim Steinsalz und Sylvin parallel den Rhombendodekaëderflächen verliefen und viel regelmässiger und schärfer ausgebildet waren. Am deutlichsten waren sie in den Prismen der Gattung (1), wo sie als zwei zu einander orthogonale, unter  $45^\circ$  gegen die Kanten geneigte Systeme von feinen Lamellen erschienen, von denen meistens das eine besonders stark ausgebildet war. Die Lamellen desselben Systems waren zu breiteren Streifen von abwechselndem

1) Stefan, l. c. p. 223.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 35. p. 660. 1888.

3) F. Pockels, l. c. p. 373.

Sinne der Doppelbrechung gruppirt, die gewöhnlich nach der einen Seite hin allmählich in einander übergingen, nach der anderen scharf begrenzt waren. Wie beim Flussspath, so wurden auch hier durch diese Lamellen die Compensatormessungen nicht beeinträchtigt; störend wirkten aber ausge dehnte verwaschene doppeltbrechende Flecken und Streifen, welche in den Prismen (2) und (3) besonders beim Sylvin vorhanden waren. Die beschriebenen Lamellen, welche am Steinsalz schon von Reusch<sup>1)</sup>, am Sylvin von Brauns<sup>2)</sup> beobachtet sind, waren meistens schon vor den Druckversuchen sichtbar, also vielleicht bei der Herstellung der Prismen entstanden; bisweilen wurden sie aber auch bei der ersten Compression zahlreicher und stärker, namentlich wenn zuerst eine Stelle des Querschnittes besonders starken Druck erhielt. Für ihren Zusammenhang mit den Gleitflächen spricht die Thatsache, dass sie sich sehr stark in einem Steinsalzprisma der Gattung (1) ausgebildet hatten, welches sich vor den Versuchen durch zu starke Pressung gleichsam aufgeblättert hatte (durch Spaltung parallel einer verticalen Würfel Fläche und Gleiten nach einer Dodekaëder Fläche). Jedenfalls hat die Bildung der doppeltbrechenden Lamellen nichts zu thun mit der gleichmässigen Doppelbrechung, welche mit dem Drucke entsteht und verschwindet.

Göttingen, im December 1889.

1) Reusch, Pogg. Ann. 132. p. 441. 1867.

2) Brauns, Neues Jahrb. für Min. 1886. 1. p. 224.

### XIII. Zur Geschichte der Lehre vom Sehen; von Eilhard Wiedemann.

Zwei Hauptansichten waren es, die im Alterthum über den Vorgang des Sehens<sup>1)</sup> bestanden: die eine, von Plato vertretene, lässt von den Augen fühlfädenartige Strahlen ausgehen und die gesehenen Gegenstände gleichsam von ihnen betasten, die andere, von Democrit und Aristoteles verfochtene dagegen von den Gegenständen selbst die Lichtstrahlen aussenden, welche dann die Augen treffen; eine vermittelnde Anschauung lässt, wie Avicenna angibt, Sehstrahlen von dem Auge ausgehen, die sich mit der leuchtenden Luft vereinigen, welche dann als Werkzeug dient.

Bekanntlich siegte im Alterthum die erstere Ansicht, Euklid und Ptolemäus nahmen sie an. Den allgemeinsten Ausdruck findet dieselbe in der Schrift: „*Liber Ptolemei de Speculis*“, die aber wahrscheinlich ein Theil der Katoptrik des Hero ist (284—221 a. C. n.). Der hier zum ersten mal auftretende Satz, dass der Strahl dann bei der Reflexion den kürzesten Weg zurücklegt, wenn Einfallswinkel gleich Reflexionswinkel ist, wird durch die That- sache begründet, dass die Strahlen vom Auge aus möglichst schnell ihr Ziel zu erreichen suchen.<sup>2)</sup> (Es heisst wörtlich: *Propter quam causam in speculis radii a nobis incidentes refringuntur et refractiones in angulis equalibus faciunt*. Das Wort *refringi* bedeutet hier, wie sein Analogon im Arabischen, reflectirt werden.) In dieser Schrift werden nicht Brennspiegel behandelt, sondern die Lage von Bildern in gekrümmten Spiegeln untersucht, wenn der Gegenstand verschiedene Lagen hat, ferner Zerrspiegel und derartiges beschrieben.

Die gewöhnliche bisherige Ansicht, wie wir sie in den verschiedensten Geschichten der Physik vertreten finden, war,

1) Die Ansichten der alten Philosophen über unsere Frage sind zusammengestellt bei E. H. von Baumhauer *de sententia philosophorum graecorum de visu luminis et coloribus* Inaug.-Diss. Trajecti ad Rhenum (Utrecht) 1843.

2) V. Rose, *Anecdota graeca et graeco-latina*. 2. p. 290 u. 317. 1870.

dass Ibn al Haiṭam<sup>1)</sup> († 1038) der erste gewesen sei, der wieder die richtige Aristotelische Anschauung sich zu eigen gemacht; in der That spricht und begründet dieser arabische Gelehrte auch die Ansicht, dass das Sehen durch Lichtstrahlen geschehe, auf das eingehendste. Indess zeigt ein eingehenderes Studium, dass Ibn al Haiṭam Vorgänger und Zeitgenossen gehabt hat, die dieselbe theilten. Es waren die arabischen Aerzte und Philosophen, die als Nachfolger von Aristoteles und als Mediciner zu der richtigen Ansicht geführt wurden.

Die Anschauungen einiger derselben erlaube ich mir im Folgenden zusammenstellen.

Al Kindi († ca. 873)<sup>2)</sup>, der älteste arabische Philosoph, nimmt noch die Ansicht Plato's etc. an, er lässt von den Augen Sehstrahlen ausgehen, die er mit den Lichtstrahlen parallelisirt, er wurde hierzu wohl durch seine Beschäftigung mit Euklid's Optik und mit den Neuplatonikern geführt.

Alle späteren stellen sich dagegen auf den Aristotelischen Standpunkt.

Von Al Fārābī (870—950) berichtet uns Vincent von Beauvais<sup>3)</sup>: „Ueber die Art und Weise des Sehens waren die Meinungen der alten Philosophen verschieden. Ihre Ansichten führt Alpharabius in seiner Schrift über den Sinn und das Wahrgenommene und Avicenna im 6. Buche auf. Alle ausser der Ansicht des Aristoteles widerlegt aber Alpharabius: mit ihm stimmen auch wir überein,

1) Ibn al Haiṭam hat sich nach seiner Autobiographie, welche uns Ibn Abi Useibia mittheilt, sehr speciell mit Aristoteles beschäftigt. Er hat zu dessen Werken eine Reihe von Commentaren verfasst, Auszüge derselben hergestellt, unter welch letzteren er nennt „Auszug aus der Schrift des Aristoteles über die Seele.“ s. Ibn Abi Useibia ed. Müller 2. p. 52. Z. 6 v. o.

2) Al Kindi hat eine Optik (Kitāb al Manāṭir) verfasst; eine lateinische Uebersetzung unter dem Titel *De aspectibus* (wie wörtlich das arabische Wort zu übersetzen ist) von Al Kindi findet sich in Basel handschriftlich, derselben sind die obigen Angaben entnommen (Venturi *Commentari sopra la storia e le teorie dell' Ottica I.* Bologna 1814. pg. 227). Al Kindi hat übrigens auch eine Schrift über Brennspiegel verfasst, vgl. hierzu Flügel, Al Kindi, Abhandlungen zur Kunde des Morgenlandes 1<sup>2</sup>. 1859.

3) Vincentius Bellovacensis. *Speculum naturale* lib. 25. cap. 43.

nämlich einmal darin, dass die wahrnehmbaren Dinge zu den Sinnen durch ein Medium gelangen: sie sind zuerst in diesem und dann in dem Sinn und ferner darin, dass von den Augen kein Strahl ausgeht.“

Rhazes' (Al Râzi † 923 oder 932) Stellung zu der Frage lässt sich bisher nur aus folgendem Büchertitel<sup>1)</sup> mit kurzer Inhaltsangabe, daraus aber ganz deutlich ersehen:

Das Buch darüber, wie man sieht (über die Wieheit „Quiddität“ des Sehens); darin ist gezeigt, dass das Sehen nicht durch Strahlen stattfindet, die von dem Auge ausgehen, und er (sc. Rhazes) widerlegt in ihm Probleme aus der Optik des Euklid.

Auch mit der Gestalt und äusseren Beschaffenheit des Auges hat sich Rhazes<sup>2)</sup> beschäftigt.

Avicenna († 1037) hat sich sehr ausführlich über die Lehre vom Sehen in dem Theil seines grossen philosophischen Werkes Al Schafaâ verbreitet, der von den Sinnen handelt<sup>3)</sup>, er discutirt die oben erwähnten Ansichten und stellt als allein richtig die Aristotelische hin „sic visio non fit ideo quod radius exeat aliquo modo et occurrat viso (dem Gesehenen), sed quia forma visi (des Gesehenen) pervenit ad visum (Gesicht), translucente reddente ipsam.“

Die Schrift enthält auch Untersuchungen über das binoculare Sehen; einer meiner Schüler wird dieselbe gelegentlich herausgeben.

Nach den Schriften der lautren Brüder (Ichwân Al Safâ) (sec. X n. Chr.) geht das Licht von den Körpern aus,

1) s. Ibn Abi Useibia, arabisch herausgeg. von A. Müller, Königsberg i. Pr. 1884. I. p. 316 Zeile 1 von oben. Der Titel in Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Aerzte und Naturforscher, Göttingen, Vandenhoeck u. Ruprecht, 1840, p. 45, Nr. 48, ist hiernach zu berichtigen. Diese Schrift dürfte mit der im Kitâb al Fihrist aufgeführten über die Blicke identisch sein.

2) Kitâb al Fihrist ed. Flügel. I. p. 299. s. auch l. c. p. 54. Zeile 6 v. u.

3) Von diesem Theil existirt unter dem Titel de anima eine in Pavia von Antonius de Carchano im letzten Jahrzehnt des 15. Jahrhunderts gedruckte Uebersetzung. Dass wirklich die lateinische Uebersetzung dem arabischen Text entspricht, war Hr. Prof. de Goeje so freundlich, durch eine Vergleichung mit einer arabischen Handschrift zu prüfen.



durchdringt die durchsichtigen Körper, nimmt ihre Farben auf und führt diese den Augäpfeln zu, die dann mit deren Farben gefärbt werden. Die andere Ansicht, dass von den Augen Strahlen ausgehen, wird als thöricht verworfen.<sup>1)</sup>

Wenn es übrigens bequemer ist, so sprechen die Araber auch noch von Sehstrahlen, so gerade Ibn al Haiṭam in seiner Schrift über die Gestalt (die Configuration) der Welt, die sich an Ptolemäus, wie er selbst sagt, anschliesst. Wo er dort von den Sonnen- und Mondfinsternissen<sup>2)</sup> spricht, sagt er:

Die Strahlen gehen von unseren Augen in Gestalt eines Kegels aus, dessen Spitze im Auge liegt, und dessen Basis die Fläche des angeschauten Körpers bildet. Sehen wir nun zur Zeit einer Finsterniss nach dem Mond, so bilden die Strahlen, welche von unserem Auge ausgehen, einen Kegel, dessen Spitze in unseren Augen liegt und dessen Basis der Mondkörper ist. Wir denken uns die Kegelfläche in gerader Richtung verlängert, bis sie zur Sonne reicht. Fällt der ganze Sonnenkörper innerhalb dieses Kegels, so wird die ganze Sonne von ihm bedeckt, und man sagt, dass die ganze Sonne von ihm verfinstert wird. Fällt aber nur ein Theil des Sonnenkörpers innerhalb dieses Kegels, ein anderer aber ausserhalb desselben, so sagt man, dass von der Sonne nur der Theil verfinstert wird, der im Inneren des Kegels gelegen ist. Wird die ganze Sonne bedeckt, so tritt unmittelbar nach der Bedeckung auch das Wiedererscheinen ein, da der Durchmesser des Strahlenkegels, da, wo er die Sonnensphäre trifft, ebenso gross ist wie der Durchmesser der Sonne; wenn der Mond daher nach der Bedeckung sich zu bewegen beginnt und der Kegel sich bewegt, so erscheint die Sonne.

Gleich darauf spricht Ibn al Haiṭam von den Sonnenfinsternissen und hier betrachtet er die wirklichen Lichtstrahlen, die von dem nicht selbst leuchtenden Mond

1) F. Dietrici, Die Philosophie der Araber im X. Jahrhundert n. Chr. Bd. 2. p. 97—98.

2) Die Schrift steht in derselben Handschrift des India Office, wie die über Brennspiegel. Die angeführte Stelle findet sich p. 110 v., vgl. über die Schrift auch Steinschneider Bulletino von Boncompagni. 14 p. 721—736. 1881; 16. p. 505—513. 1883.



reflectirt werden, ein deutlicher Beweis dafür, dass er im ersten Fall nur die einfachere Art der Darstellung gewählt hat. Der zweite Passus lautet: Liegen Sonne, Mond und Erde auf derselben geraden Linie, Sonne und Mond aber auf entgegengesetzten Seiten der Erde, so entsteht eine Mondfinsterniss, und zwar weil der Mond nicht selbst leuchtet, sondern sein Licht von dem Sonnenlicht empfängt, Er ist ein glatter Körper. Steht er der Sonne gegenüber, so empfängt er ihr Licht und wird durch dasselbe beleuchtet. Dieses Licht wird von seiner Oberfläche zur Erde reflectirt und durch dasselbe wird der Mond sichtbar. Die Erde ist aber ein dichter Körper, der einen Schatten wirft. Ihr Schatten liegt aber stets auf der von der Sonne abgewendeten Seite. Die Gestalt dieses Schattens ist ein Kegel etc.

Ueber die Berechtigung, an Stelle der Reflexion der Lichtstrahlen die der Sehstrahlen zu setzen (des Blickes), hat sich z. B. Kazwîni<sup>1)</sup> ausgesprochen, der, wie immer, auch hier nur die Ansicht anderer Gelehrten reproducirt: die Reflexion des Blickes kann nicht nach der Reflexion des Lichtes gemessen werden, da diese letztere eine reale Existenz hat, die erstere aber nicht. Nichtsdestoweniger kann sie in unserer Einbildungskraft angenommen werden, da für unseren Zweck (hier die Erklärung der Mondhöfe, Regenbogen etc.) kein Unterschied zwischen beiden Reflexionen vorhanden ist.

Ibn Roschd (Averroes † 1198) sagt übrigens sehr passend in seinem Commentar zu der Meteorologie des Aristoteles<sup>2)</sup> (lib. III. cap. II): Da der mit der Perspective sich Beschäftigende zu demselben Resultat gelangt, mag er die eine oder die andere Anschauung annehmen, und da in der Schrift über die Seele gezeigt ist, dass das Sehen nicht durch Strahlen, die vom Auge ausgehen, geschieht, so ist es passender, dass man in der Perspective nach dieser d. h. der richtigen) Ansicht verfährt.

1) Kazwîni, Kosmographie. 1. ed. Wüstenfeld, p. 98. Deutsche Uebersetzung von Ethé p. 201.

2) Lateinische Uebersetzung, gedruckt Venedig 1489.

XIV. *Nachtrag zu der Abhandlung:*  
*„Ueber die Veränderlichkeit frisch zubereiteter*  
*Flüssigkeiten“;*  
*von Emanuel Pfeiffer.*<sup>1)</sup>

In der eben genannten Arbeit habe ich namentlich die Depressionserscheinungen in der electrischen Leitungsfähigkeit reinen Wassers einer genaueren Untersuchung unterworfen und am Schluss derselben die Meinung ausgesprochen, dass vielleicht das Eindringen von organischen Theilchen aus der Luft in das Wasser die Ursache der Erscheinung bilden könnte, ohne die Bedenken zu verschweigen, welche sich einer derartigen Annahme entgegenstellen.

Nun erschien in der Zeitschrift für physikalische Chemie ein Referat über obige Arbeit von Hrn. W. Ostwald, das mich veranlasst hat, die Angelegenheit nochmals in Angriff zu nehmen. Die dabei erzielten Resultate bilden den Gegenstand der folgenden Mittheilung.

Hr. Ostwald sagt am Schlusse seines Referates: „*Das destillirte Wasser enthält stets, wenn man keine besonderen Maassregeln trifft, Kohlensäure und zwar mehr, als dem Partialdruck derselben in Luft entspricht. Die beschriebenen Verhältnisse entsprechen aber völlig denen, welche durch das Entweichen der überschüssigen Kohlensäure in die Luft eintreten müssen. Auch zeigt Wasser, welches unter Zusatz von Kalk in die Destillirblase erhalten wird, die Abnahme der Leitungsfähigkeit nicht.*“

Hiergegen möchte ich mir folgende Bemerkungen erlauben:

1) Es ist nicht gut einzusehen, wie in das destillirte Wasser solche relativ beträchtliche Mengen von Kohlensäure gelangen können. Ich nehme aus meiner Arbeit<sup>2)</sup> ein Beispiel heraus: Es fiel in fünf Tagen die Leitungsfähigkeit von

1) Pfeiffer, Wied. Ann. 37. p. 539. 1889.

2) Pfeiffer, l. c. p. 553.

1,52 bis 1,00; also um  $\frac{1}{3}$  des ganzen Werthes! Bedenkt man die minimale Leitungsfähigkeit der in Wasser gelösten Kohlensäure<sup>1)</sup>, so wären die abgegebenen Kohlensäurequantitäten geradezu enorm. Am besten ersieht man dies aus einem anderen Beispiel der Abhandlung<sup>2)</sup>: Zu 3 l Wasser, die in einer 6 Literflasche aufbewahrt wurden, wurden dadurch kleine Mengen Kohlensäure zugegeben, dass das lange Gasentbindungsrohr des Kohlensäureapparates so lange in den Luftraum der Flasche hineingehalten wurde, bis eine bestimmte Zahl von Gasblasen in der letzten Waschflasche aufgestiegen waren. Nach der jedesmaligen Zugabe wurde das Gefäß verschlossen und genügend lang geschüttelt, um Sättigung des Wassers mit  $\text{CO}_2$  unter dem jeweiligen Druck zu erzielen. Es liegt in der Natur der Versuchsanordnung, dass nicht die ganze zugegebene Gasmenge, wohl aber weit über die Hälfte derselben vom Wasser aufgenommen wurde. Nach ungefährrer Schätzung entsprechen den im ganzen zugegebenen 70 Gasblasen 18 ccm  $\text{CO}_2$ ; davon seien absorbiert ca. 10 ccm; dieser Gasmenge entspricht eine Zunahme der Leitungsfähigkeit von  $\lambda = 1,10$  bis  $\lambda = 1,21$ ; also müssten bei der obigen Depression von  $\lambda = 1,52$  bis  $\lambda_1 = 1,00$  von 3 l Wasser ca. 50 ccm Kohlensäure abgegeben worden sein. Wie solche Mengen Kohlensäure in destillirtem Wasser auftreten können, ist mir nicht klar, wenigstens bei meinen Versuchen ist ihre Existenz unmöglich.

2) Hr. Ostwald behauptet, dass die von mir gefundenen Thatsachen „völlig denen entsprechen, welche durch das Austreten der überschüssigen Kohlensäure in die Luft eintreten müssen“. Ich finde aber, dass mindestens ebenso viele dagegen als dafür sprechen. So constatirte ich z. B. regelmässig, dass, wenn frisch destillirtes Wasser mit der im Gefäß eingesperrten Luft lange geschüttelt wird, von zwei vor und nach dem Schütteln entnommenen Proben die erstere stets bedeutend kleinere Depressionen aufweist.<sup>3)</sup> Nach obiger Annahme müsste, da Schütteln zu den besten Mitteln ge-

1) Pfeiffer, Wied. Ann. 23. p. 625. 1884.

2) Pfeiffer, l. c. p. 559.

3) Pfeiffer, l. c. p. 552.

hört, um überschüssige Gase zu entfernen, das Gegentheil eintreten.

Bei einem anderen Versuch<sup>1)</sup> wurde frisch destillirtes Wasser in zwei grossen, halbgefüllten Flaschen vertheilt; die eine hermetisch verschlossen, die andere mit Fliesspapier zugebunden. In der ersten zeigt sich nach einer Woche keine Spur von Depression, in der zweiten ist die Depression vollendet. Aber auch in der ersten müsste nach obiger Annahme eine Depression auftreten; denn auch hier ist der Kohlensäure zum Entweichen in den Luftraum Gelegenheit geboten. Es müsste soviel Gas austreten, bis sein Druck im abgesperrten Luftraum dem Sättigungsdruck der noch im Wasser vorhandenen Kohlensäure an Grösse gleich geworden wäre. Eine approximative Berechnung lehrt, dass hier die Depression die Hälfte von der anderen sein müsste, was mir unmöglich hätte entgehen können.

Man sieht also, dass der von mir aufgestellte Satz (p. 549): *„Die Depressionen treten nur ein, wenn das frisch destillirte Wasser mit der freien Atmosphäre im Contact ist; dagegen kann man sie so lang hintanhalten, als dasselbe entweder ganz von der Luft abgeschlossen ist, oder mit einer abgesperrten, gereinigten Luftmenge in Berührung steht“* und die Annahme des Hrn. Ostwald nicht miteinander in Einklang stehen.

3) Wegen der Wichtigkeit der Frage für eine mich gegenwärtig beschäftigende Arbeit hielt ich es aber doch für wünschenswerth, die schliessliche Behauptung des Hrn. Ostwald zu prüfen, dass nämlich durch Zusatz von Kalk in die Destillirblase das erzielte destillirte Wasser die Abnahme der Leitungsfähigkeit nicht zeigt. Man hätte dann ausser der von mir angegebenen Methode, sich von den lästigen Depressionserscheinungen zu befreien, noch eine neue, in manchen Fällen vielleicht bequemere.

Wenn ich die erwähnte Massregel richtig verstehe, so hat der zugesetzte Kalk lediglich den Zweck, die im Wasser vorhandene Kohlensäure zu binden. Da Aetzbaryt die gleiche

1) Pfeiffer, l. c. p. 550.

Wirkung hat, so muss auch mit Zusätzen dieses Körpers die gleiche Wirkung erzielt werden.

Ich habe nun eine Anzahl von Versuchen mit wechselnden Mengen von zugesetztem Aetzbaryt ausgeführt und gebe die Resultate in der folgenden Tabelle. In ihrer ersten Columne enthält sie die aufeinander folgenden Destillationen nummerirt; in der zweiten stehen die Zusätze von (krystallwasserhaltigem) Aetzbaryt in Grammen in die Destillirblase; letztere fasste etwa 6 l; von diesen liess man 1 l unbenutzt ablaufen, während die folgenden 5 l in einer grossen Glasflasche aufgefangen wurden. Hiervon wurden jedesmal drei Proben in kleine Porcellancylinder gegossen, die durch aufgeschliffene Glasdeckel verschlossen waren. Alle drei kamen in das gleiche, durch circulirendes Brunnenwasser hergestellte Wasserbad. Im ersten wurden die einzusetzenden Electroden abgespült, in den beiden anderen wurden die sich controlirenden Parallelversuche ausgeführt; hierauf beziehen sich die Rubriken 3 und 4. Jede beider Rubriken enthält vier Unterabtheilungen, die erste für die Zeit  $z$  der Ablesung, die zweite für die Leitungsfähigkeit  $\lambda$  des Wassers, die dritte die Temperatur  $t$  des Bades; in der vierten sind die Zunahmen  $\Delta_h$  von  $\lambda$  pro Stunde berechnet, natürlich mit Reduction beider  $\lambda$  auf gleiche Temperatur.

Bei jeder Destillation mit Zusatz von Aetzbaryt überzeugte ich mich durch Anwendung von Curcumapapier, dass das Wasser in der Destillirblase vor und nach der Destillation freie Basis enthält. Ferner wartete ich nicht den Ablauf der ganzen Depression ab, sondern nahm meist nur einen Tag, da die entsprechenden  $\Delta_h$  ja ein genügendes Bild von der auftretenden Depression gaben.

| Nr. der Destillat. | Zusatz v. Aetzbaryt | Porcellancylinder I         |           |        |                       | Porcellancylinder II        |           |        |                       |
|--------------------|---------------------|-----------------------------|-----------|--------|-----------------------|-----------------------------|-----------|--------|-----------------------|
|                    |                     | $z$                         | $\lambda$ | $t$    | $\Delta_h \cdot 10^4$ | $z$                         | $\lambda$ | $t$    | $\Delta_h \cdot 10^4$ |
| 1.                 | 1 g                 | 19. Jan. 11 <sup>h</sup> 34 | 1,749     | 10° 44 | } -98<br>-49<br>-27   | 19. Jan. 11 <sup>h</sup> 27 | 1,831     | 10° 52 | } -93<br>-43<br>-31   |
|                    |                     | 20. " 10 36                 | 1,533     | 10 62  |                       | 20. " 10 32                 | 1,623     | 10 65  |                       |
|                    |                     | 21. " 10 58                 | 1,411     | 10 56  |                       | 21. " 10 54                 | 1,516     | 10 58  |                       |
|                    |                     | 22. " 9 46                  | 1,363     | 10 89  |                       | 22. " 9 42                  | 1,456     | 10 83  |                       |

| Nr. der<br>Destillat. | Zusatz v.<br>Aetzbaryt | Porcellaneylinder I   |        |   |                                  | Porcellaneylinder II             |        |   |                                  |
|-----------------------|------------------------|---|--------|---|----------------------------------|----------------------------------|--------|---|----------------------------------|
|                       |                        | z   | λ      | t | Δ <sub>h</sub> · 10 <sup>4</sup> | z                                | λ      | t | Δ <sub>h</sub> · 10 <sup>4</sup> |
| 2.                    | 4 g                    | 23. Jan. 1 <sup>h</sup> 45 9,136  | 10° 62 | } | - 24                             | 23. Jan. 1 <sup>h</sup> 50 9,152 | 10° 64 | } | - 33                             |
|                       |                        | 24. „ 10 37 9,086   | 10 62  |   |                                  | 24. „ 10 44 9,084                | 10 65  |   |                                  |
|                       |                        | 25. „ 9 39 9,041  | 10 51  |   |                                  | 25. „ 9 44 9,058                 | 10 52  |   |                                  |
| 3.                    | 2 g                    | 26. Jan. 2 <sup>h</sup> 16 3,759  | 10° 81 | } | + 2                              | 26. Jan. 2 <sup>h</sup> 25 3,784 | 10° 83 | } | + 1                              |
|                       |                        | 27. „ 9 45 3,737  | 10 61  |   |                                  | 27. „ 9 50 3,766                 | 10 66  |   |                                  |
|                       |                        | 28. „ 10 24 3,752   | 10 73  |   |                                  | 28. „ 10 34 3,790                | 10 76  |   |                                  |
| 4.                    | 0 g                    | 29. Jan. 6 <sup>h</sup> 1 1,432   | 10° 90 | } | - 47                             | 29. Jan. 6 <sup>h</sup> 6 1,388  | 10° 92 | } | - 32                             |
|                       |                        | 30. „ 10 58 1,351   | 10 80  |   |                                  | 30. „ 11 3 1,328                 | 10 80  |   |                                  |
|                       |                        | 31. „ 11 18 1,284   | 10 61  |   |                                  | 31. „ 11 21 1,261                | 10 60  |   |                                  |
| 5.                    | 1 g                    | 1. Feb. 2 <sup>h</sup> 19 2,995   | 10° 78 | } | - 4                              | 1. Feb. 2 <sup>h</sup> 26 2,998  | 10° 79 | } | + 2                              |
|                       |                        | 2. „ 10 21 2,999  | 10 89  |   |                                  | 2. „ 10 26 3,010                 | 10 88  |   |                                  |
| 6.                    | 0 g                    | 3. Feb. 3 <sup>h</sup> 21 1,117   | 10° 01 | } | - 27                             | 3. Feb. 3 <sup>h</sup> 26 1,120  | 10° 02 | } | - 29                             |
|                       |                        | 4. „ 7 51 1,083   | 10 31  |   |                                  | 4. „ 7 55 1,082                  | 10 30  |   |                                  |
| 7.                    | 0 g                    | 4. Feb. 3 <sup>h</sup> 35 0,930   | 10° 22 | } | - 25                             | 4. Feb. 3 <sup>h</sup> 41 0,932  | 10° 21 | } | - 21                             |
|                       |                        | 5. „ 7 46 0,885   | 10 04  |   |                                  | 5. „ 7 50 0,895                  | 10 07  |   |                                  |
| 8.                    | 1/2 g                  | 5. Feb. 3 <sup>h</sup> 40 1,833   | 10° 23 | } | - 35                             | 5. Feb. 3 <sup>h</sup> 46 1,821  | 10° 24 | } | - 40                             |
|                       |                        | 6. „ 8 22 1,771   | 10 16  |   |                                  | 6. „ 8 32 1,754                  | 10 23  |   |                                  |
| 9.                    | 0 g                    | 6. Februar. Diese Destillation dient nur zum Reinigen des Destillirapparates. |        |   |                                  |                                  |        |   |                                  |
| 10.                   | 0 g                    | 7. Feb. 3 <sup>h</sup> 40 1,024   | 10° 40 | } | - 42                             | 7. Feb. 3 <sup>h</sup> 48 0,968  | 10° 38 | } | - 41                             |
|                       |                        | 8. „ 7 46 0,954   | 10 30  |   |                                  | 8. „ 7 51 0,902                  | 10 32  |   |                                  |

Betrachtet man die Tabelle, so zeigt Nr. 1, dass die Zugaben freier Basis die Depression nicht bloß nicht verschwinden, sondern sogar sehr stark ausgeprägt hervortreten lässt. Nr. 2 zeigt trotz der sehr starken Dosis und trotz des sehr unreinen Destillates noch immer deutlich die Depression. Endlich bei Nr. 3 ist die Depression verschwunden, was nicht verwundern kann, da nunmehr offenbar merkliche Mengen freier Basis bereits im Destillat auftreten, welche nach meinen früheren Angaben die Depression vernichten.

Auch Nr. 4 und 5 leiden unter der basischen Verunreinigung des ganzen Destillirapparates; denn bei 4 treten schwache, bei 5 fast keine Depressionen auf. Durch die Destillationen 6 und 7 ohne Zusatz suchte ich den Apparat wieder möglichst zu reinigen. Bei 8 steigt dann trotz der basischen Zugabe die Depression von 23 auf 38; *ein schlagender Beweis, dass durch Zugabe freier Basis das Verschwinden der Depression nicht erzielt werden kann.* Trotz der Reinigungsdestillation Nr. 9 erreichen die Depressionen bei Nr. 10 keinen merklich höheren Werth, als sie schon bei Nr. 8 besaßen.

Ich kann mich also den anfangs citirten Behauptungen des Hrn. Ostwald nicht anschliessen.

München, im Februar 1890.